

## **CAPA**

**TEMA 2: Entidades Fechadas de Previdência Complementar - Gestão  
Baseada em Risco**

**Subtema: Implementação: identificação, monitoramento e  
mitigação de riscos**

**TÍTULO: Previdência complementar: impactos nas anuidades atuariais de  
pensão em função das alterações no grupo familiar**

**Pseudônimo: ALVES**

## **FOLHA ROSTO**

**Previdência complementar: impactos nas anuidades atuariais de pensão em  
função das alterações no grupo familiar**

**Pseudônimo: ALVES**

## **AVALIAÇÃO**

**Previdência complementar: impactos nas anuidades atuariais de pensão em função das alterações no grupo familiar**

**Pseudônimo: ALVES**

## **DEDICATÓRIA**

**Previdência complementar: impactos nas anuidades atuariais de pensão em  
função das alterações no grupo familiar**

**Pseudônimo: ALVES**

## **AGRADECIMENTOS**

**Previdência complementar: impactos nas anuidades atuariais de pensão em  
função das alterações no grupo familiar**

**Pseudônimo: ALVES**

## EPÍGRAFE

“não podemos banhar-nos duas vezes no mesmo rio, porque as águas  
nunca são as mesmas e nós nunca somos os mesmos”

Heráclito

## RESUMO

**Previdência complementar:** impactos nas anuidades atuariais de pensão em função das alterações no grupo familiar. 2014. 91 f.

O presente trabalho de conclusão de curso tem por objetivo analisar, no contexto de um Plano de Benefícios na modalidade de contribuição variável, de uma Entidade Fechada de Previdência Complementar (EFPC), o impacto no valor das anuidades atuariais de pensão utilizadas no cálculo de benefícios e reservas matemáticas, provocado pelas alterações de composição familiar que ocorrem após a concessão de rendas vitalícias reversíveis em pensão. Foram apresentados alguns aspectos da Previdência Privada no Brasil, enfatizando os fundos de pensão e as possíveis modalidades de plano de benefícios existentes no mercado nacional. Além disso, foi apresentada teoria atuarial relacionada ao tema Composição Familiar, de forma a basear a realização dos cálculos das anuidades de pensão. Para avaliação do impacto das alterações familiares nestas anuidades, calculamo-las utilizando a família de cada participante, ora no momento da concessão da aposentadoria, ora no ato da concessão da pensão, no caso dos assistidos que tenham falecido. O mesmo procedimento foi adotado em relação aos participantes aposentados vivos, verificando as alterações de beneficiários entre a data da aposentadoria e uma data de referência atual, para também avaliar como estas alterações ocorrem ao longo do tempo. Foi feita uma análise estatística e atuarial sobre os impactos, apresentando o objetivo, o método, a simbologia e a estrutura atuarial adotadas. Foram analisados apenas os benefícios de aposentadoria ou pensão já concedidos, observando os casos de alteração da família do titular após a concessão da aposentadoria. Por fim, foi apresentada a conclusão do trabalho, com uma avaliação do quanto as alterações familiares são capazes de influenciar no equilíbrio do Plano, de forma a contribuir na previsão e controle sobre este tipo de fenômeno. Os cálculos foram realizados a partir de uma base de dados de aproximadamente 68.300 pessoas, entre titulares e seus respectivos beneficiários, que foi analisada e criticada.

**Palavras-chave:** Previdência Complementar. Fundo de pensão. Composição familiar. Pensão por Morte. Anuidade de pensão.

## ABSTRACT

**Pension plan:** impacts on actuarial pension annuities caused by changes in family composition. 2014. 91 f.

This work aims to analyze, in the context of a Pension Plan organized as “variable contribution” in a closed pension fund, the impact on the actuarial value of pension annuities used in the plan’s calculations and mathematical reserves, caused by changes in family composition that occur after the grant of annuities reversible in pension. Some aspects of Brazilian Pension Funds were introduced, emphasizing the pension funds and the types of existing pension plans in the Brazilian market. In addition, actuarial theory, related to the topic family composition, was presented, as base of pension annuities calculations. To assess the impact of changes in these families annuities, calculations were done using the family of each participant, either at the retirement moment, either at the pension time for death participants. The same procedure was adopted for live active participants, checking the beneficiaries movements between the retirement date and a current reference date, to evaluate how these changes occur as well. Statistical and actuarial impact analysis was taken, with the aim, the method, the symbolism and the actuarial structure adopted. Only retirement benefits or pension already granted were analyzed, observing changes in the holder family after the retirement grant. Finally, the work conclusion was presented with a review of how the family changes can influence the Plan balance, in order to contribute to the prediction and control of this phenomenon. Calculations were performed from a database of approximately 68,300 people, including members and their beneficiaries, which was analyzed and criticized.

**Keywords:** Complementary Welfare. Pension Fund. Family Composition. Death Pension. Pension Annuity.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 -	Diagrama para uma série de pagamentos/recebimentos.....	29
Figura 2.2 -	Diagrama para cálculo de anuidade antecipada.....	32
Figura 2.3 -	Esquema gráfico utilizado nos cálculos biométricos.....	37
Figura 2.4 -	Representação dos pagamentos da anuidade diferida.....	40
Figura 2.5 -	Esquema gráfico da renda fracionada.....	41
Quadro 5.1 -	Composição familiar de um participante tomado como exemplo.....	62
Quadro 5.2 -	Probabilidade de morte e sobrevivência dos dependentes vinculados ao participante tomado como exemplo.....	63
Gráfico 5.1 -	Distribuição esperada e observada na data de referência.....	69
Gráfico 5.2 -	Frequências esperada e observada.....	71
Gráfico 5.3 -	Frequência dos óbitos ocorridos e esperados.....	73
Gráfico 5.4 -	Frequência dos óbitos ocorridos e esperados e a distribuição na aposentadoria.....	74
Quadro A1.1 -	Dados do aposentado.....	78
Quadro A1.2 -	Dados de seus beneficiários selecionados na data de aposentadoria: família 1.....	78
Quadro A1.3 -	Dados de seus beneficiários selecionados na data de referência: família 2.....	78

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 -	Distribuição de frequências dos $C_x$ 's na aposentadoria, e na data de referência (observada e esperada).....	68
Tabela 5.2 -	Resultado de $X^2$ por categoria.....	70

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

BD	Benefício Definido
CD	Contribuição Definida
CGPC	Conselho de Gestão da Previdência Complementar
CNPC	Conselho Nacional de Previdência Complementar
CV	Contribuição Variável
EAPC	Entidade Aberta de Previdência Complementar
EFPC	Entidade Fechada de Previdência Complementar
EUA	Estados Unidos da América
FUNCEF	Fundação dos Economiários Federais
INSS	Instituto Nacional de Seguridade Social
PETROS	Fundação Petrobras de Seguridade Social
PG	Progressão Geométrica
PREVI	Caixa de Previdência dos Funcionários do Banco do Brasil
PREVIC	Superintendência Nacional de Previdência Complementar
RMBC	Reserva Matemática de Benefícios Concedidos
SUSEP	Superintendência de Seguros Privados

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>O PROBLEMA.....</b>	<b>14</b>
<b>1.1</b>	<b>Introdução.....</b>	<b>14</b>
<b>1.2</b>	<b>Suposição.....</b>	<b>16</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivo da pesquisa.....</b>	<b>17</b>
<i>1.3.1</i>	<i>Objetivo principal.....</i>	<i>17</i>
<i>1.3.2</i>	<i>Objetivos intermediários.....</i>	<i>17</i>
<b>1.4</b>	<b>Delimitação da pesquisa.....</b>	<b>18</b>
<b>1.5</b>	<b>Relevância do estudo.....</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>REFERÊNCIAL TEÓRICO.....</b>	<b>20</b>
<b>2.1</b>	<b>A Previdência no Brasil.....</b>	<b>20</b>
<i>2.1.1</i>	<i>Regimes previdenciários.....</i>	<i>20</i>
<i>2.1.1.1</i>	<i>Regime geral de Previdência Social.....</i>	<i>20</i>
<i>2.1.1.2</i>	<i>Regimes próprios de previdência dos servidores.....</i>	<i>21</i>
<i>2.1.1.3</i>	<i>Regime de previdência complementar.....</i>	<i>21</i>
<i>2.1.2</i>	<i>Regimes financeiros.....</i>	<i>21</i>
<i>2.1.2.1</i>	<i>Regime de repartição simples.....</i>	<i>22</i>
<i>2.1.2.2</i>	<i>Regime de capitalização.....</i>	<i>22</i>
<i>2.1.2.3</i>	<i>Regime de repartição de capitais de cobertura.....</i>	<i>23</i>
<b>2.2</b>	<b>A Previdência Privada no Brasil.....</b>	<b>24</b>
<i>2.2.1</i>	<i>Breve histórico.....</i>	<i>24</i>
<i>2.2.2</i>	<i>Entidades Fechadas e Entidades Abertas.....</i>	<i>25</i>
<i>2.2.3</i>	<i>Tipos de planos.....</i>	<i>26</i>
<i>2.2.3.1</i>	<i>Planos de benefício definido.....</i>	<i>27</i>
<i>2.2.3.2</i>	<i>Planos de contribuição definida.....</i>	<i>28</i>

2.2.3.3	<i>Planos de contribuição variável.....</i>	28
<b>2.3</b>	<b>Anuidades.....</b>	<b>29</b>
2.3.1	<i>Anuidades financeiras.....</i>	30
2.3.2	<i>Anuidades atuariais.....</i>	34
2.3.2.1	<i>Anuidades individuais.....</i>	38
2.3.2.2	<i>Anuidades conjuntas.....</i>	43
2.3.2.3	<i>Anuidades de pensão – modelo prático.....</i>	45
<b>2.4</b>	<b>Hipóteses atuariais utilizadas nos cálculos de pensão.....</b>	<b>48</b>
2.4.1	<i>Taxas de juros.....</i>	49
2.4.2	<i>Mortalidade.....</i>	51
2.4.3	<i>Composição familiar.....</i>	52
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>54</b>
3.1	<i>Tipos de pesquisa.....</i>	54
3.2	<i>Universo e Amostra.....</i>	54
3.3	<i>Coleta de dados.....</i>	55
3.4	<i>Tratamento de dados.....</i>	56
3.5	<i>Limitações do método.....</i>	56
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DO BANCO DE DADOS.....</b>	<b>57</b>
<b>5</b>	<b>ANÁLISE ATUARIAL DO IMPACTO NAS ANUIDADES DE PENSÃO EM FUNÇÃO DA ALTERAÇÃO DE BENEFICIÁRIOS DE PENSÃO APÓS A CONCESSÃO DA APOSENTADORIA.....</b>	<b>58</b>
5.1	<i>Objetivo.....</i>	58
5.2	<i>Metodologia empregada na análise.....</i>	58
5.2.1	<i>Cálculo das anuidades.....</i>	60
5.2.2	<i>Distribuições de frequência das anuidades.....</i>	60
5.2.2.1	<i>Distribuições de frequência esperadas.....</i>	61

5.2.3	<i>Distribuição observada X Distribuição esperada – Teste de hipótese.....</i>	65
5.2.4	<i>Reserva matemática de benefícios concedidos.....</i>	66
5.3	<b>Resultados e análises sobre as anuidades de pensão.....</b>	67
5.3.1	<i>Aposentados vivos até a data da referência.....</i>	68
5.3.2	<i>Aposentados falecidos entre a aposentadoria e a referência.....</i>	72
6	<b>CONCLUSÃO.....</b>	75
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	76
	<b>APÊNDICE 1 – Exemplo ilustrativo da metodologia utilizada neste projeto para o cálculo das anuidades <math>H_x</math> e <math>c_x</math>.....</b>	78
	<b>ANEXO 1 – Tábuas biométricas e comutações utilizadas nos cálculos.....</b>	81
	<b>ANEXO 2 – Valores tabelados de <math>X^2</math> (qui-quadrado).....</b>	90

## **1 O PROBLEMA**

Neste primeiro capítulo, abordamos o problema que se pretende compreender com este projeto. Contextualizamos a questão que queremos resolver, o que acreditamos como resposta, os resultados que pretendemos alcançar, bem como o caminho a percorrer para se alcançar o objetivo deste estudo.

Ainda em relação ao problema, apresentamos a extensão do trabalho, ou seja, os limites da pesquisa, além da relevância do estudo para o ramo de atuação de seus autores, para a comunidade acadêmica e para a sociedade em geral.

### **1.1 Introdução**

A previdência privada no Brasil possui caráter complementar, como define a própria Constituição Federal, pois entre outras vantagens, possibilita ao associado da previdência social, não contemplado com benefício igual ao seu salário da ativa, complementar sua aposentadoria, para manter sua qualidade de vida e de sua família para valores acima do teto do INSS, atualmente em R\$ 4.390,24 (jan/2014).

Os planos de benefícios constituídos nas modalidades de benefício definido (BD) ou contribuição variável (CV)<sup>1</sup> são aqueles que melhor cumprem esse papel, pois são autorizados a oferecer benefícios de aposentadoria programada, com pagamento vitalício e reversível em pensão, com formato semelhante ao da previdência pública.

Nos planos BD, segundo a Resolução do Conselho de Gestão da Previdência Complementar (CGPC) Nº 16, de 22 de novembro de 2005, o benefício programado tem seu valor ou nível previamente estabelecido, sendo o custeio determinado atuarialmente para garantir sua concessão e manutenção. Desta forma, o benefício possui uma regra pré-definida, que geralmente tem relação com o salário do participante e com o valor

---

<sup>1</sup> Os conceitos sobre as modalidades de planos de benefícios, BD, CD e CV serão melhor abordados no capítulo 3 – Referencial Teórico.

que este receberá do Instituto Nacional de Seguridade Social (INSS), ou ao menos com um parâmetro que o represente.

Os planos de contribuição variável (CV), também denominados como híbridos (RODRIGUES, 2008), são diferentes, pois possuem atributos de planos de benefício definido, onde impera a solidariedade entre os participantes, mas também características de planos de contribuição definida (CD), como a capitalização das contribuições individualizada para cada participante.

Um formato muito praticado nesta modalidade de plano está no acúmulo de recursos distinto para cada participante, formando um saldo individual, que no ato da aposentadoria é utilizado para o cálculo de uma renda vitalícia reversível em pensão. Assim, este modelo de plano é individual na fase de acumulação<sup>2</sup>, e solidário na fase de pagamento<sup>3</sup> do plano, quando o benefício daqueles que vivem mais tempo será garantido pelo saldo restante daqueles que falecem precocemente.

Para que o benefício concedido possa ser mantido até o final da vida dos participantes e de seus beneficiários, utiliza-se em seu cálculo o conceito de anuidade atuarial vitalícia<sup>4</sup>, que veremos mais adiante, e que será responsável por transformar o saldo de conta do participante em um benefício de renda vitalícia.

O trabalho será balizado neste modelo de plano, uma vez que nossa análise será pautada justamente sobre as anuidades atuariais utilizadas no cálculo de benefícios vitalícios, com ênfase nas anuidades que representam os futuros pagamentos de pensão, que permitem apartar uma fatia de cada saldo de conta, para as pensões que serão concedidas aos beneficiários de cada participante a partir de seu óbito.

As anuidades atuariais utilizadas no cálculo desse tipo de benefício são calculadas em função da idade do participante e do seu grupo de beneficiários, ou até mesmo em função de uma distribuição média dos dependentes, segregada por idade e sexo do segurado.

---

<sup>2</sup> Fase de acumulação: compreende a fase que vai da adesão ao plano até a aposentadoria (ou até a pensão por morte de participante ativo) (RODRIGUES, 2008).

<sup>3</sup> Fase de pagamento: abrange um período que vai da aposentadoria até o falecimento do participante ou de seu beneficiário (no caso de geração de pensão por morte de aposentado) (RODRIGUES, 2008).

<sup>4</sup> O conceito de anuidade atuarial vitalícia será abordado no capítulo 3 – Referencial Teórico.



No tipo de plano que será analisado, em função do benefício estar diretamente ligado ao saldo acumulado pelo participante, parece razoável que seja calculado de forma mais customizada àquele que irá recebê-lo, utilizando para fins de pensão anuidade atuarial baseada em sua própria família.

Entretanto, não se pode esquecer que a família utilizada no cálculo da aposentadoria pode sofrer alterações até a concessão da pensão. Um assistido pode, por exemplo, divorciar-se, e estar com outra cônjuge, e até com outros filhos e/ou enteados antes de seu óbito.

Assim, a anuidade atuarial de pensão<sup>5</sup> utilizada no cálculo do benefício de aposentadoria estará de acordo com a família indicada no momento em que o participante se aposentou, e não com a nova configuração de pensionistas, causando impacto ao plano, que pode ser positivo ou negativo.

Assim, surge o seguinte problema: **o tamanho do impacto causado nas anuidades de pensão devido as alterações na família dos que já estão aposentados é capaz de desequilibrar o plano?**

## 1.2 Suposição

Acreditamos que a maioria dos participantes não altere sua família após a concessão da aposentadoria. Entretanto, esperamos naqueles que mudam sua composição familiar, que a maior parte das alterações represente elevação do compromisso. Assim, espera-se neste estudo, um impacto não muito grande, mas negativo em relação ao equilíbrio do plano.

Entende-se que um pequeno desequilíbrio provocado pelas alterações familiares dos aposentados pode ser evitado através da previsão destes acontecimentos, com adoção de medidas simples do ponto de vista atuarial.

---

<sup>5</sup> Entenda-se por anuidade atuarial de pensão como a anuidade utilizada para reduzir o valor do benefício de aposentadoria, em prol de uma futura reversão em pensão. Seu conceito será melhor abordado no capítulo 3 – Referencial Teórico.

Espera-se, então, que o resultado desta pesquisa demonstre a viabilidade, mesmo que com certos cuidados, de se usar a própria família do participante na concessão de rendas vitalícias reversíveis em pensão, em planos na modalidade de contribuição variável.

### **1.3 Objetivo da pesquisa**

Neste item, será possível identificar o objetivo principal deste projeto, além de algumas metas intermediárias necessárias para o seu alcance.

#### ***1.3.1 Objetivo principal***

O objetivo principal deste trabalho consiste em identificar o impacto que as alterações familiares ocorridas após a concessão da aposentadoria provocam nas anuidades atuariais de pensão, no contexto de um plano constituído na modalidade de contribuição variável, de uma entidade fechada de previdência complementar, utilizando como base parte da população de aposentados de um fundo de pensão.

#### ***1.3.2 Objetivos intermediários***

- a. Apresentar os pilares do modelo previdenciário brasileiro, assim como os regimes financeiros adotados na previdência nacional;
- b. Apresentar os aspectos da previdência complementar brasileira, observando seu histórico, os tipos de entidade que fazem parte deste sistema, e as modalidades de plano existentes neste mercado, com destaque para a previdência complementar fechada;

- c. Explicar de forma didática, os conceitos de anuidade, sejam elas financeiras ou atuariais, individuais ou conjuntas;
- d. Apresentar modelo de composição familiar existentes no mercado de previdência e como é utilizado no cálculo dos benefícios;
- e. Comparar a família dos participantes anos após a concessão da aposentadoria, com as famílias existente no ato da concessão, para perceber e analisar se as mudanças de composição familiar que ocorrem neste período são suficientes para desequilibrar o plano.

#### **1.4 Delimitação da pesquisa**

Esta pesquisa consiste na observação e análise sobre as alterações familiares que ocorrem após a aposentadoria, considerando os participantes aposentados de 1998 a 2012, de um único plano de benefícios de uma entidade fechada de previdência complementar.

Assim, o resultado encontrado aqui não será uma constatação sobre o tema composição familiar, mas de uma análise sobre a fatia de uma população previdenciária particular, com intuito de fornecer algum subsídio sobre o assunto, que pode, posteriormente, ser objeto de outras pesquisas.

A análise será limitada ao impacto das alterações familiares nas anuidades atuariais de pensão, e não se estenderá a avaliações atuariais mais aprofundadas sobre o plano.

Tendo em vista que os planos de contribuição variável não possuem quantidade suficiente de aposentadorias programadas por serem planos mais recentes, a população estudada será de aposentados com benefícios programados de um plano de benefício definido, com as devidas adaptações para uma estrutura de contribuição variável.

O trabalho limitou-se a estudar os aposentados a partir de 1998, pois essa base de dados representa um cenário mais recente sobre as famílias, além de serem registros mais confiáveis.

### **1.5 Relevância do estudo**

O estudo é relevante ao abordar um tema pouco experimentado na comunidade acadêmica e também no meio corporativo, principalmente pela dificuldade de se encontrar no âmbito da previdência complementar, base de dados que seja qualificada e que contemple histórico dos beneficiários de pensão.

Aos atuários, principalmente àqueles que atuam no ramo de previdência, trata-se uma ótima oportunidade de observar as possíveis alterações familiares que ocorrem após a concessão de aposentadorias e o quanto tais mudanças impactam os cálculos atuariais.

A constituição de provisões matemáticas para medir os compromissos futuros dos planos de entidades de previdência é realizada com base nos valores das anuidades, que são calculadas em função da taxa de juros e das probabilidades de morte de seus participantes e assistidos (NEVES; MIGON, 2004).

Assim, o estudo também possibilita ao leitor, conhecer um modelo prático para cálculo de anuidade atuarial de pensão, utilizada no cálculo de benefícios e provisões matemáticas de planos de contribuição variável, e calculada com base nas probabilidades de sobrevivência do participante e da sua família real.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 A Previdência no Brasil<sup>6</sup>

À semelhança da experiência observada em outros países, o desenvolvimento da previdência no Brasil também ocorreu de forma gradativa. No início, apenas alguns setores da sociedade eram contemplados, até que fosse atingida a maturação e a universalização do direito previdenciário a todo cidadão, fazendo com que a previdência social se tornasse um alicerce do Sistema de Seguridade Social, ao lado da saúde e da assistência social.

Situação análoga ocorreu do ponto de vista dos benefícios. Inicialmente, eram concedidas apenas pensões por morte. Atualmente, existe uma ampla variedade de benefícios: aposentadorias em diversas modalidades, pensões por morte e invalidez, além de auxílios diversos.

#### 2.1.1 Regimes previdenciários<sup>7</sup>

##### 2.1.1.1 Regime Geral de Previdência Social

O Regime Geral de Previdência Social é caracterizado por ser a previdência da grande massa dos trabalhadores brasileiros. É subsidiário em relação aos regimes próprios de previdência. Todos aqueles que não estiverem vinculados a um desses regimes e caso exerça atividade econômica estarão automática e compulsoriamente vinculados ao Regime Geral de Previdência Social. É o terceiro subsistema da seguridade social, está organizado sob forma de regime geral, é de caráter contributivo, de filiação obrigatória (exceto o seguro facultativo) e deve buscar a observância de critérios que preservem o equilíbrio financeiro e

---

<sup>6</sup> FERRARI; BORGES; FREITAS, 2004.

<sup>7</sup> CARVALO, 2012.

atuarial. Em sede infraconstitucional está regulamentado pela lei 8.212/1991, que trata do custeio e a lei 8.213/1991 que trata do plano de benefícios desse regime.

#### *2.1.1.2 Regimes Próprios de Previdência dos Servidores*

O Regime Próprio de Previdência dos Servidores guarda certa semelhança com o Regime Geral de Previdência, já que também é organizado com base no sistema de repartição simples (os regimes financeiros serão abordados no próximo item). Trata da previdência dos servidores públicos titulares de cargos efetivos dos entes federados, incluindo as respectivas autarquias e fundações. É de caráter contributivo e solidário e deve buscar a preservação do equilíbrio financeiro e atuarial. As regras a serem observadas para a organização dos regimes de previdência dos servidores públicos, além dos parâmetros mínimos fixados pela Constituição Federal, encontram-se na lei 9.717/1998.

#### *2.1.1.3 Regime de Previdência Complementar*

Regime de Previdência Complementar é de caráter privado e organizado de forma autônoma em relação ao regime geral de previdência social. É facultativo e baseia-se na constituição de reservas que garantam o benefício contratado. Ao contrário dos regimes próprios e do regime geral, funda-se no sistema de capitalização em que as contribuições do segurado garantem o seu próprio benefício. Está regulamentado pelas Leis Complementares 108 e 109, ambas de 2001.

#### *2.1.2 Regimes financeiros*

Os Regimes Financeiros são métodos adotados para prover os recursos necessários ao cumprimento das obrigações assumidas pelo sistema previdenciário. O custo dos compromissos assumidos por um plano previdenciário não sofre alteração em decorrência

do Regime Financeiro adotado. O que poderá sofrer alteração é a contribuição necessária para fazer frente ao custo dos compromissos assumidos. Logo, o Regime Financeiro apenas estabelece a forma pela qual os recursos necessários para o pagamento dos benefícios serão obtidos.

Existem diversos métodos para viabilizar o financiamento de benefícios previdenciários, os quais são agrupados em três Regimes Financeiros diferentes. Os tópicos seguintes apresentarão conceitos e definições envolvendo esses Regimes.

#### *2.1.2.1 Regime de repartição simples*

Neste Regime Financeiro faz-se a divisão, entre os segurados contribuintes, das despesas periódicas com os benefícios em manutenção. É realizado o cálculo das contribuições necessárias e suficientes a serem arrecadadas para atender somente ao pagamento dos benefícios nesse mesmo período. Logo, não estão previstas formação de reservas.

O Regime de Repartição Simples é o método adotado pelas previdências públicas em quase todos os países, sendo também adotado em planos previdenciários específicos para apuração de alíquotas de contribuição de benefícios periféricos.

Pode-se dizer que este Regime propõe um pacto entre gerações já que os segurados ativos, representando a geração atual, pagam os benefícios dos segurados inativos – geração passada – e confiam o pagamento de seus próprios benefícios à geração futura, de modo que o pacto intergeracional seja preservado.

A sensibilidade deste método reside fundamentalmente nas variáveis demográficas (natalidade e longevidade) e nas taxas de emprego formal.

#### *2.1.2.2 Regime de capitalização*

Neste Regime Financeiro, cada geração constitui as reservas para suportar os seus próprios benefícios. A lógica do regime capitalizado consiste na acumulação, durante a fase laborativa, dos recursos necessários para pagamento das aposentadorias. Dois momentos claramente distintos são constituídos: o período contributivo, no qual os recursos são acumulados, e o período de gozo do benefício, cujo objetivo é assegurar o pagamento dos compromissos assumidos.

A sensibilidade da capitalização recai sobre as alterações nas taxas de juros e na longevidade.

As taxas de juros afetam a velocidade de crescimento da reserva a ser formada, de tal modo que quanto maior a taxa mais rapidamente será constituído o custo assumido e, ao mesmo tempo, menor será o montante a ser acumulado, já que a rentabilidade obtida após a concessão suportará parte do valor do compromisso assumido.

Assim, quanto maior a taxa de juros, menor será a contribuição necessária para que o sistema previdenciário suporte os compromissos assumidos com os participantes.

O Regime de Capitalização apresenta considerável sensibilidade às taxas de longevidade dos segurados quando o benefício é pago sob a forma de renda vitalícia.

Diversos outros fatores interferem no equilíbrio de um sistema previdenciário estruturado no Regime de Capitalização. Qualquer nova condição que altere o valor a ser concedido ou o tempo de recebimento de suas parcelas, certamente exigirá uma revisão na estrutura de custeio para que o plano continue equilibrado. E são muitas as alterações que podem interferir no equilíbrio de capitalização, como a alteração na quantidade ou no perfil dos beneficiários, crescimento salarial acima do estimado, dentre outros.

### *2.1.2.3 Regime de repartição de capitais de cobertura*

Este último Regime Financeiro é uma conjugação do Regime de Repartição Simples com o Regime de Capitalização.

Como tal, é prevista formação de reservas – característica da capitalização – somente para os participantes em gozo de benefício. A reserva garantidora é constituída no



momento da concessão do benefício, através da divisão pura e simples entre os segurados contribuintes – característica da Repartição Simples – definindo-se, assim, contribuição única para aquele benefício concedido.

Além disso, apresenta solidariedade entre as gerações, pois são os segurados ativos, geração atual, que financiam os benefícios daqueles que se aposentam, ou seja, geração anterior.

## **2.2 A Previdência Privada no Brasil**

### **2.2.1 Breve histórico<sup>8</sup>**

Antes do marco legal que instituiu a Previdência Complementar no Brasil – Lei nº 6.435, de 15/07/1977 – já existiam Fundos de Pensão ligados às estatais, como Caixa de Previdência dos Funcionários do Banco do Brasil (PREVI) e Petros, e outros com origem em empresas privadas, de que são exemplos a Philips e Promom Engenharia, que, sob forte influência de experiências internacionais, introduziram sistemas de Previdência Complementar para seus empregados.

Na década de 70, a modalidade de previdência complementar interessava muito ao governo federal, na medida em que atendia ao desejo de diminuir os gastos com a aposentadoria dos empregados das empresas estatais, os quais eram na sua grande maioria suportados, por força legal, integralmente pelos cofres dessas mesmas empresas estatais.

Porém, anteriormente a esta data, muitas experiências de previdências privadas ocorreram em paralelo à previdência oficial. A mais antiga, inclusive anterior à própria previdência social, foi a Caixa Montepio dos Funcionários do Banco do Brasil, antecessora da PREVI, criada em 1904 a partir da iniciativa de um grupo de 51 funcionários com a finalidade de proporcionar aos seus dependentes o pagamento de uma pensão, quando do seu falecimento.

---

<sup>8</sup> FERRARI; BORGES; FREITAS, 2004.

Outra experiência de destaque, amplamente disseminada na década de 60, foram o Montepios, os quais, mediante contribuições mensais, continham promessa de pagamentos futuros, sob forma de renda vitalícia em valores fixos nominais. Essa experiência, no entanto, se mostrou desastrosa, frustrando as expectativas e prejudicando milhões de trabalhadores.

Somente a partir de 15 de julho de 1977, com a aprovação da Lei nº 6.435/77, um novo arcabouço legal é criado, onde as experiências da PREVI do Banco do Brasil e do modelo implantado na Petrobras foram fundamentais para nortear a edificação dessa nova instituição, proporcionando forte impulso para a expansão da Previdência Complementar, através de planos previdenciários organizados em empresas estatais, sob a forma de entidades fechadas sem fins lucrativos.

O surgimento da Previdência Complementar no Brasil foi marcado pelas seguintes características: nasce por interesse governamental, sob iniciativa da ditadura militar, e não por interesse dos trabalhadores; nasce com o objetivo de fortalecer o mercado de capitais (bolsa de valores) que dependia da capacidade de poupança que somente grandes empresas poderiam viabilizar; fortemente calcada nas empresas públicas; e modeladas em planos de benefício definido.

Em 16 de dezembro de 1998 foi aprovada a Emenda Constitucional nº 20 que prevê novas leis complementares sobre a matéria e impõe também severas medidas aos Fundos ligados a estatais, de que são exemplos a exigência de paridade nas contribuições do empregador como limite máximo de contribuições e o ajuste nos ativos desses Fundos.

Em 29 de maio de 2001 foram aprovadas as Leis Complementares Nº 109/01 e Nº108/01. A primeira revoga a lei 6.435/77 e define regras gerais sobre Previdência Complementar no Brasil, tanto no âmbito das fechadas como nas abertas, enquanto que a última versa sobre as relações entre os patrocinadores controlados direta ou indiretamente pela administração pública e seus respectivos Fundos de Pensão.

### ***2.2.2 Entidades Fechadas e Entidades Abertas***

No Brasil, a Previdência Complementar é classificada em entidades com fins lucrativos e entidades sem fins lucrativos, ambas sob guarita da Lei Complementar nº 109/01, porém com enormes diferenças entre elas.

Uma Entidade Fechada de Previdência Complementar<sup>9</sup>, cuja sigla é “EFPC”, também chamada de Fundo de Pensão, é uma organização sem fins lucrativos, constituída sob a forma de fundação de direito privado ou de sociedade civil. É nesta modalidade que se organizam as maiores entidades de Previdência Complementar no Brasil, como PREVI, Petros e Funcef.

A legislação prevê que as Entidades Fechadas sejam fiscalizadas e reguladas pela Superintendência Nacional de Previdência Complementar (PREVIC), órgão subordinado ao Ministério da Previdência Social.

A criação de uma EFPC está condicionada a motivação do patrocinador ou instituidor em oferecer aos seus empregados ou associados planos de benefícios de natureza previdenciária, razão pela qual são acessíveis, exclusivamente aos servidores ou aos empregados dos patrocinadores; e aos associados ou membros dos instituidores.

Por outro lado, uma Entidade Aberta de Previdência Complementar<sup>10</sup>, cuja sigla é “EAPC”, organizada sob a forma de sociedade anônima por Bancos e Seguradoras, com fins lucrativos. Através dessa modalidade são vendidos à população planos de aposentadoria de diferentes tipos, chamados “produtos previdenciários”. Podem ser planos individuais ou coletivos, e são ofertados diariamente através de maciças campanhas publicitárias. São exemplos dessas instituições a Bradesco Previdência, a BrasilPrev e a Sulamérica Previdência.

A legislação prevê que as Entidades Abertas sejam fiscalizadas e supervisionadas pela Superintendência de Seguros Privados (SUSEP), órgão subordinado ao Ministério da Fazenda.

### ***2.2.3 Tipos de plano***

---

<sup>9</sup> Definição extraída da página na internet do Ministério da Previdência Social.

<sup>10</sup> Definição extraída da página na internet do Ministério da Previdência Social.

A RESOLUÇÃO MPS/CGPC Nº 16, DE 22 DE NOVEMBRO DE 2005, normatiza os planos de benefícios de caráter previdenciário nas modalidades de benefício definido, contribuição definida e contribuição variável. Os tópicos seguintes apresentarão maiores informações a respeito desses tipos de planos.

#### *2.2.3.1 Planos de benefício definido*

O artigo 2º da referida Resolução define este tipo de plano da seguinte forma: “entende-se por plano de benefício de caráter previdenciário na modalidade de benefício definido aquele cujos benefícios programados têm seu valor ou nível previamente estabelecidos, sendo o custeio determinado atuarialmente, de forma a assegurar sua concessão e manutenção”.

Oscilações nos elementos responsáveis pela apuração do custeio se desdobram, obrigatoriamente, em ajustes nos valores das contribuições.

Os riscos decorrentes dessas oscilações são assumidos de maneira coletiva pelas partes envolvidas, participantes e patrocinadores, de acordo com as regras e condições preestabelecidas, o que lhe confere a característica de solidariedade e mutualismo.

Atualmente, há pouca oferta de planos na modalidade BD, uma vez que o benefício nestes planos é previamente conhecido, cabendo aos participantes e patrocinadores, no caso da previdência fechada, a assunção dos riscos financeiros e de longevidade, que são bem elevados nesta categoria de plano.

Na previdência complementar aberta, o risco é da própria entidade de previdência, que tem que lidar com a incerteza de conseguir alcançar a rentabilidade necessária para garantir os benefícios contratados, além de lidar com o constante aumento da longevidade que vem sendo observado ao longo dos anos.

Segundo reportagem divulgada pelo Portal da Administração, em 2007, em pesquisa realizada à época pela Consultoria Mercer, mais de metade dos patrocinadores de planos BD nos EUA já consideravam a possibilidade ou pretendiam encerrar a oferta deste tipo de plano a novos participantes ou até mesmo a migração dos atuais segurados para a Contribuição Definida, alegando falta de previsibilidade financeira.

A mesma reportagem citava que o cenário era o mesmo no Brasil, apesar de haver demanda dos clientes por planos de benefício definido, demonstrando que os planos BD estavam em extinção, mesmo com os bons indicadores que a economia mundial apresentava naquele momento.

O panorama para os planos BD não melhorou. Na verdade até piorou após a crise econômica mundial de 2008, quando aumentou a preocupação com o risco financeiro.

### *2.2.3.2 Planos de contribuição definida*

De acordo com o artigo 3º da RESOLUÇÃO MPS/CGPC Nº 16, DE 22 DE NOVEMBRO DE 2005, "entende-se por plano de benefícios de caráter previdenciário na modalidade de contribuição definida (CD) aquele cujos benefícios programados têm seu valor permanentemente ajustado ao saldo de conta mantido em favor do participante, inclusive na fase de percepção de benefícios, considerando o resultado líquido de sua aplicação, os valores aportados e os benefícios pagos”.

Na modelagem CD pura não existe qualquer solidariedade ou mutualismo. As reservas são individualizadas, tendo cada segurado a sua própria conta previdenciária de modo a financiar o seu próprio risco individualmente.

### *2.2.3.3 Planos de contribuição variável*

O artigo 4º da RESOLUÇÃO MPS/CGPC Nº 16, DE 22 DE NOVEMBRO DE 2005, define um plano de benefícios de caráter previdenciário na modalidade de contribuição variável como sendo “aquele cujos benefícios programados apresentem a conjugação das características das modalidades de contribuição definida (CD) e benefício definido (BD)”.

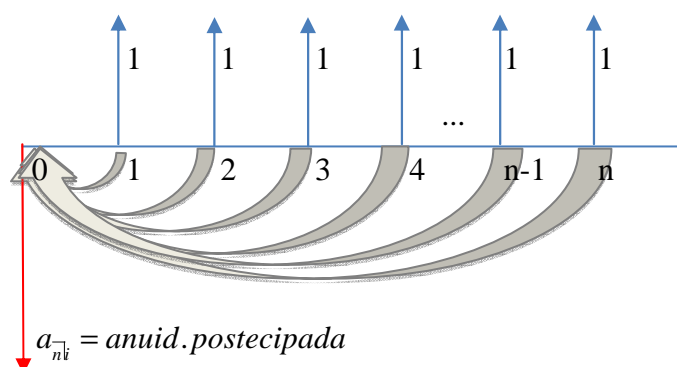
Durante a fase de contribuição não há garantia em relação ao valor do benefício no momento da aposentadoria. Esse valor dependerá da rentabilidade acumulada.

No entanto, a partir do momento da concessão da aposentadoria, o valor do benefício é fixado e passa a ser garantido por um indexador, normalmente um índice de inflação.

## 2.3 Anuidades

O conceito de anuidade corresponde a uma série de pagamentos/recebimentos anuais, unitários e uniformes, trazidos a valor presente, ou seja, o valor atual desta série de pagamentos/recebimentos. Para fins didáticos, neste trabalho vamos atrelar o conceito de anuidade apenas como fluxo de recebimentos, quando o ponto de vista for do participante, ou como fluxo de pagamentos, quando o enfoque for na entidade pagadora de benefícios.

**Figura 2.1 – Diagrama para uma série de pagamentos/recebimentos**



Fonte: GITMAN, 2006.

As anuidades ou séries de recebimentos podem ser classificadas em rendas certas ou aleatórias. As rendas certas também chamadas de rendas garantidas, são aquelas que o fator de probabilidade associado ao recebimento dos respectivos termos de renda é sempre igual a 1,00 (certeza). Já as rendas aleatórias são as rendas nas quais o recebimento dos respectivos termos de renda está condicionado a fatores de probabilidade que variam entre 0,00 e 1,00 (incerteza) (PINHEIRO, 2005).

As anuidades financeiras se encaixam na ideia de renda certa, pois o recebimento é garantido e não leva em consideração nenhuma probabilidade de que não

ocorra. Levam em consideração apenas a taxa de juros para desconto dos recebimentos a valor atual.

Já as anuidades atuariais representam as rendas aleatórias, pois conjugam a taxa de juros para desconto do fluxo a valor presente, com as probabilidades de sobrevivência do indivíduo para recebimento de cada parcela do fluxo.

As anuidades podem ser imediatas ou diferidas. As imediatas são aquelas em que os recebimentos se iniciam imediatamente no começo ou final do primeiro período, sem a exigência de carências, e as diferidas são aquelas em que os recebimentos se iniciam após o primeiro período, ou seja, após uma certa carência (PINHEIRO, 2005).

As anuidades ainda são classificadas quanto ao vencimento de seus recebimentos, podendo ser antecipadas ou postecipadas. As anuidades antecipadas são aquelas em que o vencimento dos recebimentos se dará no início de cada período e as postecipadas aquelas em que o vencimento se dá no final de cada período.

Cabe ainda classificar as anuidades quanto a sua duração, como temporárias ou perpétuas, quando financeiras, e temporárias ou vitalícias, quando atuariais.

### ***2.3.1 Anuidades financeiras***

Como já dissemos, uma anuidade financeira representa o valor presente de uma série de recebimentos certos, unitários, anuais, e uniformes, que podem perdurar por um certo período de tempo  $n$ , ou de forma perpétua.

O processo para se encontrar valores presentes tem referência em taxas de desconto de fluxo de caixa. É um processo inverso da capitalização de juros. Ao invés de se achar o valor futuro de unidades monetárias atuais investidas a uma taxa qualquer, taxas de desconto determinam o valor presente de um montante futuro, presumindo a oportunidade de obter um certo rendimento (GITMAN, 2006).

Em resumo, trazer um capital a valor presente significa encontrar o valor atual que aplicado a uma determinada taxa de juros presumida, alcançara o mesmo valor do

capital futuro desejado. No caso da anuidade, esta deve representar o montante atual suficiente para cumprir com toda a série de pagamentos/recebimentos futuros.

Vejamos então, como encontrar o valor de uma anuidade financeira postecipada e temporária em  $n$  períodos (ver figura 2.1), considerando uma taxa de desconto  $i$ .

Seja  $A_1$  o valor atual de um valor futuro  $F_1$ , que foi capitalizado por um único período, à uma taxa de juros  $i$ . Assim,  $F_1 = A_1 * (1+i)$ , e portanto,  $A_1 = \frac{F_1}{1+i} = F_1 * (1+i)^{-1}$ . Desta forma, se o valor futuro  $F_1$  é igual a 1, teremos seu valor atual  $A_1 = (1+i)^{-1}$ .

De maneira análoga, chegaremos à conclusão que o valor atual de uma unidade a ser recebida após dois períodos de capitalização teria seu valor atual  $A_2 = (1+i)^{-2}$ . O mesmo aconteceria com as outras parcelas da série, com o valor atual de uma unidade a ser recebida após  $n$  períodos de capitalização igual a  $(1+i)^{-n}$ .

Portanto, o cálculo da anuidade financeira postecipada e temporária se daria da seguinte forma:

$$a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-n} \quad (2.1)$$

Este somatório representa a soma de uma progressão geométrica (PG) com primeiro termo  $a_1 = (1+i)^{-1}$ , o último termo  $a_n = (1+i)^{-n}$ , e a razão da PG ( $q$ ) igual a  $(1+i)^{-1}$ .

Lembrando que a soma  $S$  de uma PG pode ser calculada pela fórmula  $S = \frac{a_1 - a_n * q}{1 - q}$ , ao

substituímos os termos e a razão da PG que representa a anuidade financeira, teremos para

esta, o seguinte resultado:  $a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ .

Portanto, se quisermos calcular, por exemplo, o valor atual de uma série periódica de recebimentos anuais e iguais a uma unidade monetária, de forma postecipada, e por 6 anos consecutivos, considerando uma taxa de desconto de 5% a.a., teríamos o seguinte resultado:

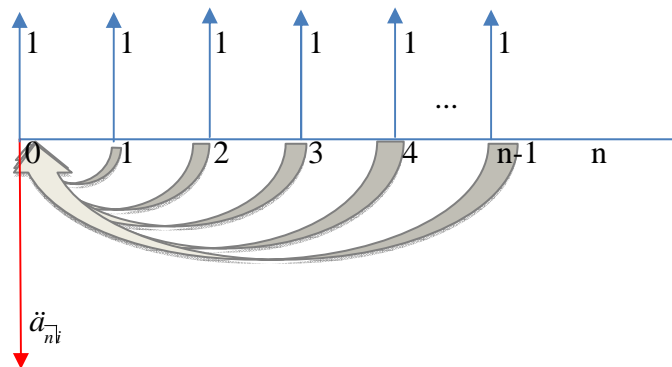
$$a_{\overline{6}|5\%} = \frac{1 - (1+0,05)^{-6}}{0,05} = 5,075692 \quad (\text{Exemplo 2.1})$$



Desta maneira, para cumprir com a série de seis recebimentos de valor igual a \$ 1,00, ocorridos ao final de cada período, considerando uma taxa de juros de 5% a.a., seria necessário ter hoje o valor de \$ 5,08. Supondo uma renda anual de \$ 900,00, seria necessário um saldo atual de  $5,08 * 900,00 = \$ 4.572,00$ .

Vimos até o momento como se calcula uma anuidade financeira temporária e postecipada, ou seja, aquela em que os recebimentos ocorrem ao final do período, e por um tempo finito. Vejamos agora, como se calcula uma anuidade antecipada, ou seja, quando os recebimentos previstos ocorrem no início de cada período (figura 2.2).

**Figura 2.2 – Diagrama para cálculo de anuidade antecipada**



Fonte: GITMAN, 2006 .

O mecanismo de cálculo será o mesmo da anuidade postecipada. A anuidade continua sendo a soma de uma PG de  $n$  termos, com a mesma razão  $q = (1+i)^{-1}$ , mas com o primeiro termo  $a_1 = 1$  e o último termo  $a_n = (1+i)^{-n+1}$ .

Aplicando a mesma fórmula da soma da PG utilizada para a anuidade postecipada, teremos o seguinte resultado:  $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} * (1+i)$ . Logo,  $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} * (1+i)$ .

É possível perceber pela própria fórmula, que a anuidade antecipada é maior do que a postecipada. Afinal, a anuidade antecipada possui um período a menos de desconto nos recebimentos, o que exige um montante atual maior, tendo em vista que será necessário cumprir com os recebimentos de maneira mais imediata, sem tempo para capitalizar o montante antes do primeiro recebimento.

No exemplo acima mencionado, de uma anuidade temporária por 6 anos, o valor da anuidade antecipada ficaria em \$ 5,334, contra \$ 5,08 da postecipada. Logo, para cumprir com uma renda anual antecipada de \$ 900,00, seria necessário o montante atual de \$ 4.800,60, 5% maior que o montante de \$ 4.572,00 da postecipada.

Contudo, no ambiente de previdência, é natural que as rendas sejam pagas de maneira mensal, e portanto, há necessidade de se encontrar as anuidades mensalizadas. Este procedimento pode ser efetuado considerando uma mensalidade igual a  $1/12$ , e utilizando a taxa efetiva mensal ( $i_m$ ) equivalente a taxa anual  $i$ .

Desta forma, teríamos, considerando recebimentos mensais, as seguintes relações para as anuidades postecipada e antecipada, respectivamente:

$$a_{\overline{12n}|i_m} = \frac{1 - (1 + i_m)^{-12n}}{12i_m} \quad \text{e} \quad \ddot{a}_{\overline{12n}|i_m} = \frac{1 - (1 + i_m)^{-12n}}{12i_m} \times (1 + i_m) \quad (2.2) \text{ e } (2.3)$$

Usando o exemplo de uma anuidade postecipada, temporária por 6 anos, considerando recebimentos mensais, e uma taxa anual de 5% a.a., encontraríamos o seguinte resultado:

$$a_{\overline{12 \times 6}|0,00407412\%} = \frac{1 - (1 + 0,00407412)^{-12 \times 6}}{12 \times 0,00407412} = 5,191 \quad (\text{Exemplo 2.2})$$

O valor encontrado é um pouco maior que a anuidade normal, pois necessita-se de um valor presente mais alto, uma vez que os recebimentos se iniciam após um mês e não após um ano.

Vimos até agora o conceito de anuidade financeira que representa uma série finita de recebimentos. Mas também existem séries perpétuas, ou seja, infinitas. Vejamos como estas ocorrem.

A equivalência entre  $P$  (anuidade perpétua) e uma série uniforme, postecipada, de capitais iguais a uma unidade monetária, e com um número de termos muito grande, é obtida como limite de uma anuidade financeira postecipada quando

$$n \rightarrow \infty : P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad (\text{LAPPONI, 2005}).$$

Resolvendo este limite, tem-se  $P = \frac{1}{i}$ . Assim, uma renda unitária perpétua e postecipada, considerando uma taxa presumida de 5% a.a., teria um valor atual total de

$P = \frac{1}{0,05} = 20$  - Exemplo (2.3), ou seja, para fazer frente a uma renda anual e infinita no valor de \$ 1, seria necessário um montante atual de \$20.

De maneira análoga, a anuidade que representa uma série perpétua, de capitais unitários, porém antecipada, será  $P = \frac{1+i}{i}$ .

A maioria das séries de rendas certas, inclusive as de interesse da matemática aplicada a planos previdenciários fechados, são temporárias de “n” pagamentos (PINHEIRO, 2005). Portanto, não vamos mais nos estender ao assunto de perpetuidade.

### 2.3.2 Anuidades atuariais<sup>11</sup>

O conceito de anuidade atuarial é muito próximo da anuidade financeira, sendo a fundamental diferença, o caráter de incerteza no recebimento de cada parcela da anuidade, uma vez que nestas se insere a probabilidade do indivíduo, ou de um grupo de indivíduos, estar vivo para receber cada parcela.

Na anuidade atuarial individual, além do desconto financeiro  $v^{n12}$ , há também a probabilidade do indivíduo de idade  $x$  sobreviver até o pagamento da parcela  $n$ , denominada  ${}_n p_x$ , que juntos formam o fator de desconto atuarial  ${}_n E_x$ .

Considere que se deseje pagar a um determinado segurado de idade  $x$  uma quantia unitária, caso este sobreviva a  $n$  anos a partir da contratação do seguro. Haverá necessidade de identificar o valor presente da operação para precificá-la. Será identificado  ${}_n K_x$  como sendo esse valor.

$${}_n k_x = \begin{cases} v^n, & \text{com probabilidade } {}_n p_x \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - {}_n p_x \end{cases} \quad (2.4)$$

---

<sup>11</sup> RODRIGUES, 2008.

<sup>12</sup>  $v = \frac{1}{1+i}$

O preço da operação será determinado tendo-se em vista duas probabilidades dicotômicas<sup>13</sup>:

- a) Caso  $(x)$  sobreviva<sup>14</sup> a  $n$  anos, será paga a quantia unitária e, portanto, o valor presente será dado por  $v^n$ .
- b) Caso  $(x)$  não sobreviva a  $n$  anos, nada lhe será pago e, portanto, o valor presente do pagamento será zero.

Assim, o preço desta operação será o valor médio da operação proposta para  $(x)$ , e se dará da seguinte forma:

$$E[{}_n k_x] = {}_n E_x = {}_n p_x \cdot v^n + (1 - {}_n p_x) \cdot 0 = {}_n p_x \cdot v^n \quad (2.5)$$

De maneira análoga, também existem fatores de desconto atuarial que consideram, além do desconto financeiro, a probabilidade de vida de um grupo, no lugar de apenas um indivíduo, dependendo do status de existência do grupo<sup>16</sup>, que são definidos da seguinte forma:

- a)  $(x_1 x_2 x_3 \dots x_m)$   $\rightarrow$  é a notação para o grupo de  $m$  indivíduos que existe enquanto todos os indivíduos estão vivos e se extingue quando o primeiro morre.
- b)  $\overline{(x_1 x_2 x_3 \dots x_m)}$   $\rightarrow$  é a notação para o grupo de  $m$  indivíduos que existe enquanto pelo menos 1 indivíduo sobrevive e se extingue após a última morte.
- c)  $\overline{\overline{r}(x_1 x_2 x_3 \dots x_m)}$   $\rightarrow$  é a notação para o grupo de  $m$  indivíduos que existe enquanto pelo menos  $r$  indivíduos sobrevivem e se extingue após a  $n-r+1$  -ésima morte.

---

<sup>13</sup> Probabilidades dicotômicas se referem a eventos antagônicos, como o lançamento de uma moeda (cara ou coroa) ou inferências relativas ao estado biométrico de um segurado (vivo ou morto, válido ou inválido). A distribuição dicotômica caracteriza-se pela busca do sucesso ou fracasso em face dessas únicas possibilidades estatísticas. As probabilidades atribuídas a cada uma dessas chances, apesar de excludentes, não são necessariamente idênticas (50% contra 50%) (RODRIGUES, 2008).

<sup>14</sup>  $(x)$ , quando assim representado, equivalerá a um determinado participante ou segurado de idade  $x$ .

<sup>15</sup> Esperança matemática da Distribuição Bernoulli, referente aos eventos dicotômicos, onde  $E[X] = p$ , sendo  $p$  é a probabilidade de sucesso (RODRIGUES, 2008).

<sup>16</sup> JORDAN, 1967.

- d)  $\overline{[r]}_{(x_1 x_2 x_3 \dots x_m)} \rightarrow$  é a notação para o grupo de  $m$  indivíduos que existe quando exatamente  $r$  indivíduos sobrevivem e se extingue caso contrário.

Assim, podemos ter, dentre outros, os seguintes fatores de desconto atuarial:

${}_n E_{\overline{[r]}_{x_1 x_2 x_3 \dots x_m}} = {}_n P_{x_1 x_2 x_3 \dots x_m} \cdot v^n$  ou  ${}_n E_{\overline{[r]}_{x_1 x_2 x_3 \dots x_m}} = {}_n P_{\overline{[r]}_{x_1 x_2 x_3 \dots x_m}} \cdot v^n$ , onde  ${}_n P_{x_1 x_2 x_3 \dots x_m}$  é a probabilidade de todos os elementos do grupo sobreviverem a  $n$  anos, e  ${}_n P_{\overline{[r]}_{x_1 x_2 x_3 \dots x_m}}$  é a probabilidade de ao menos um indivíduo do grupo sobreviver a  $n$  anos.

Retornando ao campo individual, destaca-se que o elemento de sobrevivência do indivíduo será apurado segundo uma tábua de mortalidade, cuja função é dar esperança de vida para uma determinada idade (inteira) compreendida no intervalo  $[0, \omega]$ <sup>17</sup>. A essa probabilidade chamamos Função de Sobrevivência, na forma  $s(x) = P[X > x]$ , conforme figura 2.3 (RODRIGUES, 2008).

Normalmente, à função  $s(x)$  deve-se acrescentar uma constante denominada *radix*, com valor  $\mathfrak{R} = 10^6$  na forma  $\mathfrak{R} \cdot s(x)$ . Para satisfazer a função  $s(x)$ , foram desenvolvidas algumas leis de mortalidade. Seguem alguns exemplos:

$$1724 - \text{De Moivre} \Rightarrow s(x) = e^{-ux},$$

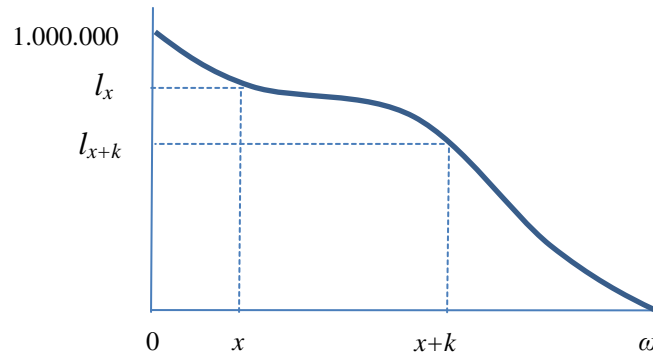
$$1825 - \text{Gompertz} \Rightarrow s(x) = g^{c^x - 1},$$

$$1860 - \text{Makehan} \Rightarrow s(x) = s^x \cdot g^{c^x - 1}$$

$$1939 - \text{Weibull} \Rightarrow s(x) = e^{-\frac{k}{x+1} x^{n+1}}$$

<sup>17</sup>Entende-se por  $\omega$ , a última idade da tábua biométrica.

**Figura 2.3 – Esquema gráfico utilizado nos cálculos biométricos**



Fonte: RODIGUES, 2008

Da curva acima são retiradas todas as inferências para obtenção de cálculos biométricos relativos a previdência. Algumas dessas relações são definidas a seguir:

$${}_k p_x = \frac{l_{x+k}}{l_x} = 1 - {}_k q_x \quad (2.6)$$

A expressão (2.6) é a probabilidade de um indivíduo de idade  $x$  completar a idade  $x+k$ , sendo  ${}_k q_x$  o seu complementar, ou seja, suas chances de vir a falecer antes de completar a idade  $x+k$ . Designa-se  $l_x$  como sendo o número de vivos na idade  $x$ . Como a função  $s(x)$  é decrescente em  $x$ , entre  $x$  e  $x+k$  ocorrem falecimentos, sendo essa medida expressa por  ${}_k d_x = l_x - l_{x+k}$ .

Como  ${}_k q_x$  é complementar a  ${}_k p_x$ , temos:

$${}_k q_x = 1 - \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+k}}{l_x} = \frac{{}_k d_x}{l_x} \quad (2.7)$$

Das expressões (2.6) e (2.7), chegamos as expressões que representam as probabilidade de que um indivíduo de idade  $x$  sobreviva por um ano, ou que venha a falecer em até um ano, ou seja, as probabilidades que um indivíduo de idade  $x$  alcance ou não a idade  $x+1$ . São elas:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad \text{e} \quad q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} \quad (2.8) \quad (2.9)$$

Através da expressão (2.6) podemos desenvolver o fator de desconto atuarial da seguinte forma:

$${}_nE_x = {}_n p_x \cdot v^n = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n, \text{ que ao multiplicarmos por } \frac{v^x}{v^x}, \text{ teremos:}$$

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n \cdot \frac{v^x}{v^x} = \frac{v^{x+n} \cdot l_{x+n}}{v^x \cdot l_x} \quad (2.10)$$

Isso produz uma simetria no numerador e denominador que sugerem a definição de uma função comutação  $D_x = v^x \cdot l_x$  (JORDAN, 1967).

$$\text{Substituindo } D_x \text{ na expressão (2.10), temos } {}_nE_x = \frac{v^{x+n} \cdot l_{x+n}}{v^x \cdot l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

### 2.3.2.1 Anuidades individuais<sup>18</sup>

Como já vimos, uma anuidade atuarial individual caracteriza-se por considerar a sobrevivência de um indivíduo ( $x$ ) até a idade ( $x+n$ ), para que este possa receber cada parcela  $n$  que compõe a anuidade.

Por conta disso, a anuidade atuarial é chamada de renda vitalícia, pois trata-se de uma sucessão de pagamentos que se realizam de forma contínua, em intervalos iguais, enquanto ( $x$ ) sobreviva. Pode ser temporária, ou seja, limitada a um número determinado de anos, ou paga durante toda a vida do indivíduo.

Da mesma maneira que as financeiras, as anuidades atuariais podem iniciar o pagamento imediatamente, ou de forma diferida. Além disso, os pagamentos podem ser realizados de forma antecipada, no início de cada período, ou postecipada, ao final de cada período.

O valor atuarial de uma renda vitalícia (aleatória) é o valor médio da variável aleatória que expressa o valor financeiro atual de todas as prestações. Entretanto, é

---

<sup>18</sup> VILLALÓN, 1997.

mais fácil determiná-lo como a soma dos valores atuariais das prestações, e como já vimos, estes valores atuariais nada mais são do que os fatores de desconto atuarial,  ${}_nE_x$ .

Assim o valor atuarial de uma renda vitalícia anual, unitária, imediata, antecipada e ilimitada, se daria como a soma de todos os fatores de desconto atuarial, desde a idade atual do participante ( $x$ ), período  $t = 0$ , uma vez que a anuidade é antecipada, até a última idade da tábua biométrica ( $\omega$ ), onde a probabilidade de sobrevivência do indivíduo se torna nula, ou seja, até o período  $t = \omega - x$ .

Temos então a seguinte formulação:

$$\ddot{a}_x = {}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + \dots + {}_{w-x}E_x = \sum_{t=0}^{w-x} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{w-x} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{\sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t}}{D_x} \quad (2.11)$$

Para maior facilidade nos cálculos, existe a seguinte comutação:

$$N_x = \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t} \quad (2.12)$$

Daí, temos:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \quad (2.13)$$

Já uma anuidade vitalícia com as mesmas características, porém postecipada, teria como única diferença, o início do somatório a partir do período  $t = 1$ . Assim, a formulação seria a seguinte:

$$a_x = \sum_{t=1}^{w-x} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{\sum_{t=1}^{w-x} D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} \quad (2.14)$$

Imaginemos agora, o valor atuarial de uma renda vitalícia anual, unitária, imediata, porém temporária por  $n$  anos. Como são  $n$  períodos de pagamento, o período  $t$  variará entre  $0$  e  $n-1$ , no caso da antecipada, e entre  $1$  e  $n$ , no caso da postecipada. Teríamos então as seguintes anuidades, respectivamente:

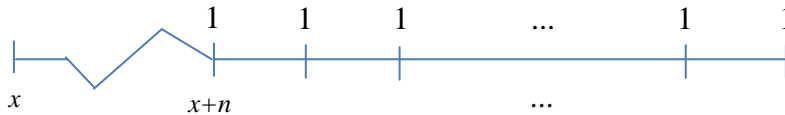


$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_0E_x + {}_1E_x + \dots + {}_{n-1}E_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}}{D_x} = \frac{\sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t} - \sum_{t=n}^{w-x} D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \quad (2.15)$$

$$a_{x:\overline{n}|} = {}_1E_x + {}_2E_x + \dots + {}_nE_x = \sum_{t=1}^n {}_tE_x = \frac{\sum_{t=1}^n D_{x+t}}{D_x} = \frac{\sum_{t=1}^{w-x} D_{x+t} - \sum_{t=n+1}^{w-x} D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \quad (2.16)$$

Outra anuidade importante, e que será utilizada neste projeto, é a anuidade diferida, que caracteriza-se por ter um período de carência de  $n$  anos antes do início dos pagamentos. Gráficamente poderia ser representada da seguinte maneira:

**Figura 2.4 – Representação dos pagamentos da anuidade diferida**



Fonte: VILLALÓN, 1997.

Repare que neste tipo de anuidade, os fatores de desconto atuariais dos  $n$  primeiros períodos não farão parte do somatório que representa a anuidade. Desta forma, teremos a seguinte formulação para anuidade vitalícia, diferida e antecipada:

$${}_n\ddot{a}_x = {}_nE_x + {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + \dots + {}_{w-x}E_x = \sum_{t=n}^{w-x} {}_tE_x = \frac{\sum_{t=n}^{w-x} D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+n}}{D_x} \quad (2.17)$$

Analogamente, a anuidade vitalícia postecipada, diferida de  $n$  anos, será da seguinte forma:

$${}_n\ddot{a}_x = \sum_{t=n+1}^{w-x} {}_tE_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \quad (2.18)$$

Vale lembrar ainda, das anuidades vitalícias diferidas por  $n$  anos, e temporárias por  $m$  anos, que não serão utilizadas nos cálculos deste projeto, mas que possuem a seguinte formulação para antecipada e postecipada, respectivamente:

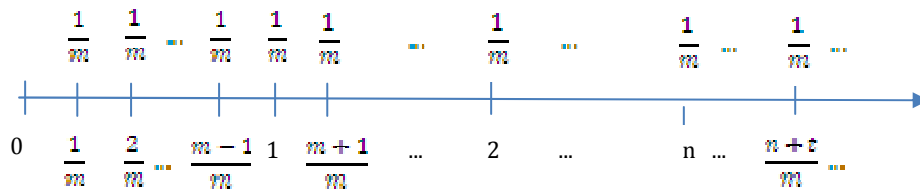
$${}_n\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \frac{N_{x+n} - N_{x+m+n}}{D_x} e_{n/\overline{m}|} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x} \quad (2.19)$$

Até agora vimos como são definidas as anuidades vitalícias individuais, considerando pagamentos unitários e anuais. Ocorre, porém, que os benefícios concedidos pelas entidades de previdência complementar, sejam elas abertas ou fechadas, possuem, em sua maioria, periodicidade mensal, e não anual como vimos até o momento.

Assim, vejamos como se dá o valor atuarial de uma renda vitalícia de 1 unidade monetária por ano, paga em parcelas de  $1/m$  ao final de cada  $m$ -ésimo de ano (postecipada) enquanto ( $x$ ) sobreviva. Esta renda será chamada de renda fracionada, e será denotada por  $a_x^{(m)}$ .

Graficamente:

**Figura 2.5 – Esquema gráfico da renda fracionada**



Fonte: VILLALÓN, 1997.

Assim, pode-se formular  $a_x^{(m)}$  da seguinte maneira:

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} [{}_{1/m}E_x + {}_{2/m}E_x + \dots + {}_1E_x + {}_{1+1/m}E_x + \dots + \dots + {}_{n+t/m}E_x + \dots] \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t/m}E_x = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t/m}$$

Adotando uma aproximação linear entre dos descontos atuarias consecutivos, com  $n$  inteiro, temos:

$${}_{n+t/m}E_x \cong {}_nE_x + \frac{1}{m} ({}_{n+1}E_x - {}_nE_x) \quad (2.21)$$

Então:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^m {}_{n+t/m}E_x &= \sum_{t=1}^m \left[ {}_nE_x + \frac{t}{m}({}_{n+1}E_x - {}_nE_x) \right] = m \cdot {}_nE_x + \frac{m+1}{2}({}_{n+1}E_x - {}_nE_x) \\ &= \frac{m-1}{2} \cdot {}_nE_x + \frac{m+1}{2} \cdot {}_{n+1}E_x \end{aligned} \quad (2.22)$$

Portanto:

$$a_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{m-1}{2m} {}_nE_x + \frac{m+1}{2m} {}_{n+1}E_x \right) = \frac{m-1}{2m} \ddot{a}_x + \frac{m+1}{2m} a_x \quad (2.23)$$

Levando em conta que  $\ddot{a}_x = 1 + a_x$ , temos como anuidade postecipada e fracionada em  $m$  pagamentos anuais, o seguinte resultado:

$$a_x^{(m)} \cong a_x + \frac{m-1}{2m} \quad (2.24)$$

E como anuidade antecipada, fracionada em  $m$  pagamentos anuais:

$$\ddot{a}_x^{(m)} \cong \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \quad (2.25)$$

Analogamente, podemos encontrar todas as outras anuidades fracionadas através das anuidades de pagamentos anuais. Segue abaixo, os resultados das mais importantes para a continuidade deste projeto:

Diferida de  $n$  anos, ilimitada, e fracionada de  $m$  anos:

a) Postecipada:  ${}_n a_x^{(m)} \cong {}_n a_x + \frac{m-1}{2m} \cdot {}_n E_x$

b) Antecipada:  ${}_n \ddot{a}_x^{(m)} \cong {}_n \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \cdot {}_n E_x$

Imediata, temporária por  $n$  anos, e fracionada por  $m$  anos:

a) Postecipada:  $a_{x:n}^{(m)} \cong a_{x:n} + \frac{m-1}{2m} \cdot (1 - {}_n E_x)$

b) Antecipada:  $\ddot{a}_{x:n}^{(m)} \cong \ddot{a}_{x:n} - \frac{m-1}{2m} \cdot (1 - {}_n E_x)$

### 2.3.2.2 Anuidades conjuntas<sup>19</sup>

No item anterior, analisamos como se constituem as rendas vitalícias pagas de acordo com a sobrevivência de um único indivíduo ( $x$ ). Agora, vamos analisar o valor das rendas vitalícias, considerando não só a sobrevivência de um indivíduo ( $x$ ), mas de todo um grupo ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ).

Este tipo de renda tem aplicação direta nos benefícios de pensão. Afinal, quando o titular de um plano de previdência com reversão em pensão vem a falecer, o benefício será pago enquanto o grupo de beneficiários do titular sobreviver, podendo representar 100% do benefício do titular, ou um percentual do mesmo, que pode ser dividido ainda, em cota familiar (baseada no grupo), e cotas individuais (baseadas em cada beneficiário).

As anuidades atuariais que representam rendas vitalícias pagas a um grupo dependem do seu status de existência, que citamos no item 2.3.2 deste estudo. Neste projeto, utilizaremos apenas o grupo  $\overline{(x_1 x_2 x_3 \dots x_m)}$ , que existe enquanto ao menos um de seus membros sobrevive, e portanto, apresentaremos apenas as anuidades referentes a este status de existência.

Primeiramente, vejamos a probabilidade de que um grupo  $\overline{(x_1 x_2)}$  se extinga nos próximos  $n$  anos:

$${}_n q_{\overline{(x_1 x_2)}} = {}_n q_{x_1} \cdot {}_n q_{x_2} = (1 - {}_n p_{x_1})(1 - {}_n p_{x_2}) = 1 - {}_n p_{x_1} - {}_n p_{x_2} + {}_n p_{x_1 x_2} \quad (2.26)$$

Observando o caso anterior, para o grupo ser totalmente extinto, ambos os membros precisam falecer. Vejamos agora, a probabilidade de que o grupo sobreviva a  $n$  anos:

$${}_n p_{\overline{(x_1 x_2)}} = {}_n p_{x_1} (1 - {}_n p_{x_2}) + {}_n p_{x_2} (1 - {}_n p_{x_1}) + {}_n p_{x_1} {}_n p_{x_2} \quad (2.27)$$

No caso anterior, basta que um dos indivíduos permaneça vivo para que o grupo continue existindo. Assim, leva-se em consideração a probabilidade de um sobreviver e o outro falecer, e vice-versa, além da probabilidade dos dois sobreviverem.

---

<sup>19</sup> VILLALÓN, 1997; JORDAN, 1967.

Evoluindo para a probabilidade de sobrevivência de um grupo com número maior de membros, teríamos:

$$\begin{aligned} {}_n p_{x_1 x_2 \dots x_m} &= 1 - (1 - {}_n p_{x_1})(1 - {}_n p_{x_2}) \dots (1 - {}_n p_{x_m}) \\ &= \sum {}_n p_{x_1} - \sum {}_n p_{x_1 x_2} + \sum {}_n p_{x_1 x_2 x_3} - \sum {}_n p_{x_1 x_2 x_3} + \sum {}_n p_{x_1 x_2 x_3 x_4} + \dots + (-1)^{m+1} {}_n p_{x_1 x_2 \dots x_m} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Onde  $\sum {}_n p_{x_1 x_2 \dots x_t}$  é o somatório das probabilidades de que todos os indivíduos de um grupo de  $t$  membros sobreviva, considerando todas as combinações de  $t$  membros que podemos formar com os  $m$  elementos do conjunto inicial.

Trata-se de uma fórmula extensa e com certo grau de complexidade. Desta expressão, chega-se a seguinte fórmula para o valor atuarial de uma renda vitalícia imediata, unitária, postecipada e paga a um grupo que existe até a morte de seu último membro:

$$\begin{aligned} a_{x_1 x_2 \dots x_m} &= \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_{x_1 x_2 \dots x_m} \cdot v^t \\ &= \sum_{(1)} a_{x_1} - \sum_{(2)} a_{x_1 x_2} + \dots + (-1)^{t+1} \sum_{(t)} a_{x_1 x_2 \dots x_t} + \dots + (-1)^{m+1} a_{x_1 x_2 \dots x_m} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Onde denotamos  $\sum_{(t)} a_{x_1 x_2 \dots x_t}$  como a soma dos valores atuariais das rendas unitárias, imediatas, postecipadas e ilimitadas, a favor de todos os grupos distintos, que se extinguem a partir da morte do primeiro membro, com todos os grupos de  $t$  membros que se pode formar a partir dos  $m$  membros do conjunto inicial.

Vale lembrar que  $a_{x_1 x_2 \dots x_m} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_{x_1 x_2 \dots x_m} \cdot v^t$  e que  ${}_t p_{x_1 x_2 \dots x_m} = {}_t p_{x_1} \cdot {}_t p_{x_2} \cdot \dots \cdot {}_t p_{x_m}$

A anuidade antecipada tem a mesma formulação da postecipada, e também se apresenta da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x_1 x_2 \dots x_m} &= \sum_{t=0}^{\infty} {}_t p_{x_1 x_2 \dots x_m} \cdot v^t \\ &= \sum_{(1)} \ddot{a}_{x_1} - \sum_{(2)} \ddot{a}_{x_1 x_2} + \dots + (-1)^{t+1} \sum_{(t)} \ddot{a}_{x_1 x_2 \dots x_t} + \dots + (-1)^{m+1} \ddot{a}_{x_1 x_2 \dots x_m} \end{aligned} \quad (2.30)$$

É possível perceber que a utilização de anuidades conjuntas no dia a dia não é muito simples, pois as fórmulas não são tão práticas como as anuidades individuais, em que simples comutações facilitam muito o cálculo.

É comum que o mercado se utilize de adaptações para o cálculo de anuidades grupais, de forma a simplificar o cálculo, e também a melhorar a performance dos sistemas que as utilizam. Veremos um exemplo deste tipo de adaptação no próximo item.

### 2.3.2.3 Anuidades de pensão – modelo prático<sup>20</sup>

No presente projeto, usaremos três anuidades vitalícias relacionadas a pagamentos de pensão. São elas:  $H_x$ ,  $c_x^{(12)}$  e  $c_x^{i(12)}$ , que possuem as seguintes definições:

$H_x$ : valor atual de uma renda unitária postecipada anual, fracionada mensalmente, pagável aos beneficiários de um participante (ativo ou aposentado) que faleça com a idade  $x$ , enquanto mantiverem a relação de beneficiários;

$c_x^{(12)}$ : valor atual de uma renda unitária postecipada anual, pagável aos beneficiários de um participante (ativo ou aposentado) de idade  $x$  após seu falecimento, enquanto mantiverem a relação de beneficiários, em prestações mensais e iguais ao duodécimo da anual a uma pessoa de idade  $x$ ;

$c_x^{i(12)}$ : valor atual de uma renda unitária postecipada anual, pagável aos beneficiários de um participante inválido de idade  $x$  após seu falecimento enquanto mantiverem a relação de beneficiários, em prestações mensais e iguais ao duodécimo da anual a uma pessoa de idade  $x$ ;

A primeira destas anuidades,  $H_x$ , refere-se a série de pagamentos que será feita aos beneficiários de um participante que falece com a idade  $x$ , ou seja, seu cálculo pressupõe a morte do participante e, por isso, somente a vida dos beneficiários é considerada, bem como os percentuais de rateio para pagamento de pensão por ventura existentes no Regulamento do Plano. Este tipo de anuidade é usado, por exemplo, na apuração de encargo de pensão já concedida.

Já o cálculo das anuidades  $c_x^{(12)}$  e  $c_x^{i(12)}$ , que se distinguem apenas pela condição de invalidez do participante, considera que o participante está vivo, representando o

---

<sup>20</sup> ROCHA, 2001.

valor esperado para a série de pagamentos unitários que será feita aos beneficiários do participante a partir de seu falecimento, de acordo com a probabilidade de morte do indivíduo a cada idade.

Estas anuidades são utilizadas no cálculo de rendas de aposentadoria reversíveis em pensão, pois permitem embutir no cálculo o valor esperado de pensão que será pago no futuro. São utilizadas também para apuração do encargo de pensão a conceder, uma vez que projeta o valor esperado que será concedido, utilizando as probabilidades de morte em cada idade do participante vivo.

No nosso caso em particular, a anuidade  $H_x$ , que representa a soma pagamentos unitários que serão feitos à família do participante falecido a título de pensão, será composta por uma cota familiar de 50%, mais 10% de cota individual por beneficiário, limitado a 5 beneficiários. Assim, o valor de pensão não será necessariamente o benefício que o participante percebia quando faleceu, mas um percentual deste, limitado a 100%, quando houver 5 ou mais beneficiários.

Para o cálculo do  $H_x$  será necessário calcular uma anuidade grupal, referente a cota de 50%, e as anuidades individuais, relacionadas às cotas de 10%. A anuidade grupal, que neste trabalho já abordamos sob a denominação de conjunta, é relativamente complexa e, portanto, a utilização de um modelo prático é bem vista pelo mercado. O modelo apresentado por Rocha (2001), tem o seguinte formato:

A anuidade grupal representa o valor atual dos pagamentos a serem feitos para o grupo de pensionistas e é classificada em função da situação dos beneficiários de pensão. Existem beneficiários vitalícios, como cônjuge e filho inválido, e temporários, como filhos menores de 24 anos (de acordo com o Regulamento do Plano utilizado como base deste projeto). A anuidade grupal é calculada de acordo com as seguintes situações:

- Um beneficiário vitalício:  $a_{gr} = a_z$ , isto é, corresponde à anuidade vitalícia do beneficiário de idade  $z$ ;
- Vários beneficiários vitalícios:  $a_{gr} = a_z$ , corresponde à anuidade vitalícia do beneficiário de idade  $z$ , onde  $z$  é a idade do beneficiário mais novo do grupo familiar;
- Vários beneficiários temporários:  $a_{gr} = a_{\overline{24-y}|}$ , isto é, corresponde à renda certa da idade limite (24 anos) menos a idade do beneficiário mais novo do grupo

familiar. Esta metodologia é conservadora, pois não considera a probabilidade de morte dos beneficiários temporários até atingir a maioridade;

- Um ou mais beneficiários vitalícios e um ou mais beneficiários temporários:  $a_{gr} = a_{\overline{24-y}|} + {}_{24-y}a_z$ , isto é, corresponde à renda certa da idade limite (24 anos) menos a idade do beneficiário temporário mais novo do grupo familiar (y), mais a anuidade diferida do mesmo período para o beneficiário vitalício mais novo de idade z.

A anuidade individual representa o valor atual dos pagamentos a serem feitos para cada pensionista e depende da situação do beneficiário. Caso o beneficiário seja vitalício, a anuidade corresponde à anuidade vitalícia  $a_z$ , onde z é a idade do beneficiário vitalício. Caso o beneficiário seja temporário, a anuidade corresponde à anuidade certa  $a_{\overline{24-y}|}$ , onde y é a idade do beneficiário temporário.

A seguir descreve-se como é calculada a anuidade  $H_x$ :

$$H_x = 0,5 \cdot a_{gr} + 0,1 \cdot \sum_{t=1}^5 a_{indt}, \text{ sendo } a_{indt} \text{ as 5 maiores anuidades individuais}$$

do grupo familiar.

A partir do cálculo do  $H_x$  podemos encontrar o valor das anuidades  $c_x^{(12)}$  e  $c_x^{i(12)}$ , cujas fórmulas seguem abaixo:

$$c_x^{(12)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \cdot {}_t p_x \cdot q_{x+t} \cdot H_{x+t} \quad \text{e} \quad c_x^{i(12)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \cdot {}_t p_x^i \cdot q_{x+t}^i \cdot H_{x+t} \quad (2.31) \quad (2.32)$$

Repare que estas anuidades representam o valor esperado para anuidade de pensão de um participante que está vivo, considerando os vários momentos em que pode ocorrer seu falecimento.

Estas anuidades incorporam em seus cálculos a probabilidade do participante de idade x sobreviver até a idade x+t, morrer com esta idade, e deixar pensão para a sua família, que já está com idade avançada em t anos. Tal procedimento é feito para cada ano em que a morte do participante é possível e, por isso, pode-se considerar  $c_x^{(12)}$  como um valor esperado do  $H_x$  de um participante válido, uma vez que toda sua curva de sobrevivência foi considerada.



## 2.4 Hipóteses atuariais utilizadas nos cálculos de pensão<sup>21</sup>

Entende-se por hipóteses atuariais<sup>22</sup>, premissas ou hipóteses biométricas, demográficas, econômicas e financeiras utilizadas pelo atuário na elaboração da avaliação atuarial do Plano de Benefícios, adequadas às características do conjunto de participantes e ao respectivo Regulamento. Devem refletir a realidade da empresa (área de atuação, política de recursos humanos, etc.), da comunidade local (cidade/país), bem como a legislação vigente e as variáveis macroeconômicas.

Repare que a definição de hipótese atuarial está diretamente ligada a avaliação atuarial dos Planos de Benefícios, mas também devem ser utilizadas quando do cálculo de benefícios vitalícios de planos de contribuição variável, visto que estes devem refletir a expectativa sobre a longevidade dos que irão recebê-lo, bem como os ganhos que ainda serão auferidos sobre o saldo de conta utilizado no cálculo.

A adequação das premissas à massa de participantes do plano avaliado é de suma importância e foi normatizada pelo Conselho de Gestão da Previdência Complementar (CGPC), antigo órgão regulador da Previdência Complementar Fechada no Brasil, através de sua Resolução Nº 18, de 28 de março de 2006, que no primeiro item de seu anexo, dispõe:

*1. As hipóteses biométricas, demográficas, econômicas e financeiras devem estar adequadas às características da massa de participantes e assistidos e ao regulamento do plano de benefícios de caráter previdenciário.*

Pinheiro (2007) apresenta a classificação das variáveis, enumeradas a seguir, que conforme Winklevoss (1993), influenciam a situação financeira e atuarial de planos de benefícios oferecidos por fundos de pensão, organizados no regime de capitalização:

- a) Variáveis Econômicas:
  - (i) Taxa de juros;
  - (ii) Rentabilidade dos investimentos;
  - (iii) Salários (incluindo escala de mérito e ganhos de produtividade);
  - (iv) Valor do benefício da previdência social;

---

<sup>21</sup> PINHEIRO, 2007.

<sup>22</sup> Definição retirada da Coletânea de Normas dos Fundos de Pensão, 2012

- (v) Inflação.
  
- b) Variáveis Demográficas:
  - (i) Mortalidade (de válidos e inválidos);
  - (ii) Entrada em invalidez;
  - (iii) Geração futura de novos entrados;
  - (iv) Rotatividade;
  - (v) Composição familiar.
  
- c) Outras Variáveis:
  - (i) Idade de aposentadoria;
  - (ii) Idade de entrada no emprego;
  - (iii) Taxa de contribuição.

Nosso trabalho trata exclusivamente das pensões a conceder ou concedidas em função da morte de aposentados, por isso não entraremos no mérito de premissas adotadas para os cálculos de benefícios a conceder em relação a participantes ativos, mas tão somente dos participantes assistidos.

Assim, destacamos a seguir, cada uma das premissas que são consideradas como mais importantes nos cálculos dos benefícios de aposentadoria reversíveis em pensão e dos encargos de pensões concedidas ou a conceder de participantes aposentados. São elas: taxa de juros, mortalidade de válidos e inválidos e composição familiar.

#### ***2.4.1 Taxa de juros***

A taxa de juros é uma das variáveis mais suscetíveis dentro do modelo de custeio do fundo de pensão, haja vista envolver processos de capitalização com períodos de até 60 anos, que vão desde a fase de acumulação das reservas ao efetivo pagamento dos benefícios de aposentadoria (PINHEIRO, 2007).

Em planos de Contribuição Variável (CV) que concedem benefícios vitalícios, a taxa de juros é premissa fundamental no valor do benefício calculado, pois tem relação direta com o valor das anuidades de aposentadoria e pensão utilizadas no cálculo.

A magnitude do valor presente de uma série futura de pagamento de benefícios depende da taxa de juros escolhida para desconto desse fluxo, que é função da expectativa da taxa de rentabilidade dos investimentos. Assim, com uma alta taxa de juros como hipótese, ter-se-á um valor presente menor e vice-versa; logo, o valor atual dos benefícios futuros de um plano de benefício de uma entidade fechada de previdência complementar é inversamente proporcional à taxa de juros.

Sendo assim, a utilização de uma taxa que não será alcançada pela rentabilidade dos investimentos resultará na concessão de benefícios acima da capacidade de pagamento da Entidade, sendo esta uma premissa que requer muito cuidado e atenção.

O ordenamento legal sobre o assunto, previsto pelo órgão regulador por meio da Resolução do CGPC nº 18, de 28 de março de 2006, limitava a taxa máxima de juros reais para projeções atuariais dos planos de benefícios em 6% a.a.

No entanto, o próprio órgão regulador, agora denominado Conselho Nacional de Previdência Complementar (CNPc), preocupado com a política de queda de juros adotada pelo Banco Central do Brasil a partir de 2011, alterou a Resolução Nº 18, através da Resolução CNPC Nº 9, de 28/11/2012, reduzindo o limite da taxa de juros admitida nas projeções atuariais dos planos de benefícios em 0,25% ao ano, até chegar a 4,5% no exercício de 2018. O escalonamento se dará da seguinte forma:

I – 6,0% (seis por cento) ao ano ou sua equivalência mensal, na avaliação atuarial relativa ao exercício de 2012;

II – 5,75% (cinco inteiros e setenta e cinco centésimos por cento) ao ano ou sua equivalência mensal, na avaliação atuarial relativa ao exercício de 2013;

III – 5,5% (cinco inteiros e cinco décimos por cento) ao ano ou sua equivalência mensal, na avaliação atuarial relativa ao exercício de 2014;

IV – 5,25% (cinco inteiros e vinte e cinco centésimos por cento) ao ano ou sua equivalência mensal, na avaliação atuarial relativa ao exercício de 2015;

V – 5,0% (cinco por cento) ao ano ou sua equivalência mensal, na avaliação atuarial relativa ao exercício de 2016;

VI – 4,75% (quatro inteiros e setenta e cinco centésimos por cento) ao ano ou sua equivalência mensal, na avaliação atuarial relativa ao exercício de 2017; e

VII – 4,5% (quatro inteiros e cinco décimos por cento) ao ano ou sua equivalência mensal, nas avaliações atuariais relativas aos exercícios de 2018 e seguintes.

Tal medida demonstra a importância dada pelo órgão regulador a esta hipótese atuarial, que possui grande impacto nas projeções atuariais, e pode trazer grande desequilíbrio ao plano se não estiver adequada às expectativas de rentabilidade sobre os ativos do plano.

#### ***2.4.2 Mortalidade***

A variável mortalidade é utilizada para dimensionar o valor atual dos benefícios futuros cujo evento gerador pode ser a morte, produzindo o benefício de pensão por morte, como também pode ser a sobrevivência, ocasionando o benefício de aposentadoria por tempo de contribuição ou idade.

A premissa de mortalidade tem papel fundamental no cálculo das anuidades atuariais que são utilizadas no cálculo dos benefícios de aposentadoria vitalícios dos planos CV, e no dimensionamento dos encargos de aposentadoria e pensão do plano. Quanto maior expectativa de vida da tábua, maiores as anuidades.

A legislação brasileira, através da Resolução CGPC Nº 18, em vigor a partir de março de 2006, determinou como tábua mínima de mortalidade de válidos a ser utilizada nas projeções da longevidade de participantes e assistidos em gozo de benefício de aposentadoria programada e continuada, a tábua AT-83 – antes, pela Resolução CGPC n.º 11, de 21 de agosto de 2002, era a tábua AT-49. Para a mortalidade de inválidos, a regulamentação da previdência complementar não exige uma tábua como limite máximo de probabilidade de mortalidade de inválidos.

Apesar da legislação determinar uma tábua mínima de mortalidade de válidos, sua adoção não é automática. A Resolução CGPC Nº 9, de 29 de novembro de 2012, alterou alguns pontos da Resolução CGPC Nº 18, destacando que a tábua adotada deve ser

atestada por estudo específico que comprove que a tábua é aderente a massa de participantes e assistidos do plano, nos três últimos exercícios.

### ***2.4.3 Composição familiar***

Na Coletânea de Normas dos Fundos de Pensão, a composição familiar está definida como o conjunto de beneficiários considerados na apuração dos compromissos decorrentes de morte ou reclusão do participante.

Ricardo P. Pinheiro, através de sua publicação sobre a demografia dos fundos de pensão, pelo Ministério da Previdência Social, em 2007, apresenta a classificação de Winklevoss (1993), sobre as variáveis que influenciam na situação financeira e atuarial do plano, dentre elas a composição familiar, que é classificada como uma das variáveis demográficas que deve ser observada nas projeções de reserva do Plano.

Pinheiro (2007), define a premissa composição familiar como a variável que representa o tamanho da família segurada, destacando sua importância na formação das reservas matemáticas quando o plano de benefícios prevê pagamento de pensões.

Alguns fundos de pensão trabalham com grupos familiares reais, lançando no cálculo atuarial os dados da própria família de cada um dos participantes do plano de benefícios, outros utilizam uma modelagem média ou o Heritor (Hx), em que se trabalha com uma distribuição média de dependentes por idade e sexo do segurado.

A utilização da família real para projeção de benefícios a conceder de participantes ativos não é o ideal, uma vez que a família ainda pode sofrer muitas alterações até a aposentadoria do participante. Assim, utilizar uma família média segregada por idade e sexo permite maior aproximação da família do participante em sua aposentadoria.

Já para participantes aposentados, onde a família tende a sofrer menor variação, parece razoável a utilização da família real na concessão do benefício, bem como no encargo de pensão a ser concedida a partir da morte do assistido. Na projeção de reservas de pensões concedidas, a utilização da família real é indiscutível, uma vez que as variações no grupo de pensionistas devem ser consideradas no compromisso do plano.

Nosso trabalho trará exatamente da utilização da família real na projeção de reservas inerentes aos participantes assistidos. Nosso objetivo é identificar o quanto a família dos aposentados se alteram até a morte do assistido, para determinar o risco que existe na utilização da família real.

### **3 METODOLOGIA**

Este capítulo apresenta a metodologia empregada no estudo. Os procedimentos abrangem os tipos de pesquisa, o universo amostral abordado e o tratamento dos dados obtidos.

#### **3.1 Tipo de pesquisa**

De acordo com os critérios e taxionomias de tipos de pesquisa apresentados por Vergara (1998), no que se refere aos fins, a pesquisa se enquadra no perfil de pesquisa explicativa. Esta classificação se deve ao fato do estudo buscar comprovações que converjam para os fatores assumidos como suposição, ou seja, que as alterações familiares ocorridas após a concessão da aposentadoria provoquem impactos, mesmo que pequenos, nas anuidades atuariais de pensão, no contexto de um plano constituído na modalidade de contribuição variável, de uma entidade de previdência complementar.

Quanto aos meios de investigação, o estudo abrange a pesquisa de estudo de caso, já que o mesmo se limita a uma fatia da população de um plano previdenciário específico que apresenta determinado comportamento em relação à composição do grupo familiar dos participantes aposentados.

#### **3.2 Universo e Amostra**

A partir da população de um plano constituído na modalidade de benefício definido, de uma entidade de previdência complementar, foram selecionados os participantes aposentados para que as alterações percebidas em seus grupos familiares sejam objeto do estudo proposto. A opção por assistidos de um plano BD se deve ao fato de não termos tido acesso a um plano CV com massa suficiente para a análise pretendida.

Consequentemente, a partir do universo de participantes aposentados, delimitamos como amostra os participantes cujo grupo familiar sofreu alteração após a concessão do benefício de aposentadoria, visando apurar a sensibilidade quanto ao impacto dessa alteração nas anuidades atuariais de pensão.

Logo, de acordo com Vergara (1998), trata-se de uma amostra não probabilística, selecionada por tipicidade.

### **3.3 Coleta de dados**

Foram coletados os dados das famílias dos aposentados em que o início do pagamento do benefício se deu a partir de 1998, já que os dados das demais famílias não atendem os requisitos desejáveis de confiabilidade e consistência. Desses, foram descartados os aposentados cujo benefício foi concedido há menos de 12 meses, contados a partir mês de referência utilizado neste estudo, ou seja, benefícios concedidos após junho/2012.

Na seleção dos aposentados não foram considerados as aposentadorias por invalidez.

A partir dos aposentados selecionados, dois momentos no tempo foram estabelecidos para a coleta dos dados das famílias: o primeiro, na concessão do benefício da aposentadoria, e o segundo, na referência junho/2013, para aposentados ainda vivos, ou na data de óbito, para aposentados que já faleceram.

Para fins de comparação, as idades dos integrantes das famílias e as idades dos aposentados foram consideradas na referência junho/2013, no caso dos aposentados vivos, ou na data do óbito do aposentado, no caso deste ser falecido.

Os integrantes das famílias, denominados beneficiários, foram classificados em vitalícios ou temporários (temporalidade) conforme o tipo de vínculo com o aposentado e o indicativo de invalidez.

A partir das idades e da temporalidade apuradas nos dois momentos estabelecidos, os aposentados foram analisados quanto a alteração na composição do grupo familiar.



Serão objeto do estudo proposto apenas os aposentados que possuíam beneficiários na concessão de sua aposentadoria, mesmo que tenha incluído beneficiários depois de aposentado. Utilizamos este critério, pois num plano CV, caso o participante não possua beneficiários na concessão da aposentadoria, provavelmente irá optar por um benefício sem reversão em pensão, se esta opção lhe for dada.

O banco de dados resultante da coleta realizada é do tipo confidencial, não sendo possível identificar os indivíduos que o compõem.

### **3.4 Tratamento de dados**

A partir da análise dos dados coletados de acordo com as definições apresentadas no tópico anterior, critérios adicionais foram considerados para suavizar interferências indesejadas, decorrentes de fatores técnicos e operacionais, tais como manutenções corretivas nos dados, cargas de dados em lote, não cadastramento de beneficiários filho(a) no ocasião de seu nascimento, não cadastramento de beneficiário cônjuge na ocasião do matrimônio.

### **3.5 Limitações do método**

Os dados coletados servirão de insumo para a análise do impacto nas anuidades atuariais de pensão, não havendo quaisquer outros cálculos de interesse do estudo proposto.

#### 4 ANÁLISE DO BANCO DE DADOS

A fim de se evitar que alterações na composição dos grupos familiares fossem apontadas indevidamente, tendo como origem dados cadastrais incompletos e inconsistentes, alguns critérios complementares às regras utilizadas na coleta dos dados foram definidos e empregados durante a análise do banco de dados original.

Os filhos, que não constavam no Cadastro de Beneficiários no momento da concessão da aposentadoria e cujas datas de nascimento são anteriores à data de concessão, foram incluídos naquele cadastro de modo a corrigir distorções geradas por dados cadastrais incompletos ou desatualizados.

Para apuração dos beneficiários existentes na data de referência (30 de junho de 2013) foi aplicado o mesmo critério, ou seja, foram incluídos nessa relação os beneficiários cuja data de nascimento é anterior à referência.

Em contrapartida, a mesma regra não foi aplicada aos beneficiários com vínculo de menor sob guarda e tutelado(a). Para essas situações não existe a garantia de que o beneficiário pertencia ao rol de dependentes do participante no momento da concessão de sua aposentadoria.

Adicionalmente, foram desconsiderados do estudo os dependentes com vínculo de genitor(a) ou irmão(ã).

Os beneficiários classificados como temporários tiveram suas idades calculadas na data de referência (30 de junho de 2013), para análise dos aposentados vivos, ou na data da concessão da pensão para análise dos aposentados falecidos. Os beneficiários cuja idade ultrapassou os 24 anos completos foram desconsiderados.

Para apuração dos beneficiários cônjuges existentes na data de referência (30 de junho de 2013), além dos critérios já citados, foi aplicado critério adicional para considerar beneficiários cuja diferença de idade em relação ao participante vivo fosse menor do que 10 anos (valor absoluto), mesmo que esse tenha sido incluído no Cadastro de Beneficiário após a data de referência. Esse critério foi utilizado para se evitar situações em que dados cadastrais incompletos ou desatualizados (dados incluídos após a data de referência) gerassem indicativos de alterações na composição do grupo familiar.

## **5 ANÁLISE ATUARIAL DO IMPACTO NAS ANUIDADES DE PENSÃO EM FUNÇÃO DA ALTERAÇÃO DE BENEFICIÁRIOS DE PENSÃO APÓS A CONCESSÃO DA APOSENTADORIA**

### **5.1 Objetivo**

O objetivo desta análise de dados está em identificar se há uma mudança brusca nas famílias dos aposentados, entre a concessão de aposentadoria e uma data de referência pré-determinada, a ponto de causar impacto significativo nos encargos de pensão de participantes aposentados no plano.

Identificando a proporção de famílias que se alteram após a aposentadoria dos participantes e o tamanho do impacto causado por estas variações, podemos inferir se a mudança na composição familiar dos aposentados deve ser objeto de preocupação por parte das entidades de previdência complementar, principalmente nos planos estruturados na modalidade de contribuição variável que utilizam a família real do participante no cálculo de benefícios vitalícios reversíveis em pensão.

### **5.2 Metodologia empregada na análise**

Para cumprir com o objetivo deste estudo, separamos a análise em dois grupos distintos: aposentados sobreviventes até a data de referência pré-determinada e aposentados que vieram a falecer entre a concessão da aposentadoria e a citada data de referência.

No primeiro grupo, daqueles que sobreviveram até a data de referência, analisamos a variação de duas anuidades de pensão diferentes,  $H_x$  e  $c_x$ , ambas com as idades do participante e de seus beneficiários posicionadas em 30/06/2013 (referência), e cujas fórmulas serão expostas ainda neste capítulo.

Para identificar o impacto das alterações familiares sobre as anuidades, cada uma delas foi calculada conforme a família do participante, observando o cadastro em dois momentos distintos: na sua aposentadoria e na data de referência, lembrando que as idades dos beneficiários foram atualizadas para a data de referência em ambos os cálculos, conforme exemplo a seguir:

#### **Exemplo (5.1)**

Suponhamos um participante do sexo masculino nascido em 07/05/1950, que se aposentou em 21/01/2004. Naquele momento, sua família cadastrada na entidade era de apenas uma esposa, nascida em 16/09/1960. Já em 30/06/2013 (referência), sua família era composta por uma outra esposa, nascida em 25/05/1974. Desta forma, seriam calculadas anuidades com ambas as famílias, mas com os dados atualizados em 30/06/2013, para possibilitar a comparação entre os valores encontrados, ou seja, os cálculos seriam efetuados com as seguintes informações:

Anuidades na aposentadoria: participante do sexo masculino, com 63 anos de idade, com uma beneficiária vitalícia do sexo feminino de 52 anos de idade.

Anuidades na referência: participante do sexo masculino, com 63 anos de idade, com uma beneficiária vitalícia do sexo feminino de 38 anos de idade.

Repare que apesar das famílias terem sido selecionadas em momentos distintos, as idades do participante e dos seus beneficiários foram calculadas em 30/06/2013.

A primeira anuidade ( $H_x$ ) foi calculada em função apenas das características dos beneficiários do participante (sexo, parentesco, idade e indicativo de invalidez), e seria utilizada para o cálculo de encargo de pensão concedida, caso o participante estivesse falecido. A segunda anuidade ( $c_x$ ) considera não só as características dos beneficiários, mas também a probabilidade de morte do participante a cada ano que passa, sendo utilizada nos cálculos de encargo de pensão a conceder e do próprio benefício de aposentadoria.

Para o segundo grupo, dos participantes que faleceram até a data de referência (30/06/2013), foi calculada apenas a anuidade  $H_x$ , visto que a anuidade  $c_x$  não se aplica a participantes falecidos. A exemplo do primeiro grupo, as anuidades também foram calculadas com base no cadastro de beneficiários do participante em dois momentos distintos: na data de aposentadoria e na data do óbito do participante.

Assim, é possível identificar qual é o encargo de pensão atual, considerando a família para qual a pensão foi concedida, e qual seria o encargo caso a família do participante continuasse a mesma da época em que se aposentou. É claro que aqueles que não mudaram de família entre a aposentadoria e o óbito não apresentarão variação na anuidade.

### **5.2.1 Cálculo das anuidades**

As anuidades foram calculadas seguindo a metodologia apresentada por Rocha (2001), em sua dissertação de mestrado sobre o modelo estocástico do passivo atuarial de um Fundo de Pensão, que descrevemos no item 2.3.2.3 do Referencial Teórico deste projeto.

No Anexo 1, segue exemplo ilustrativo dos cálculos das anuidades  $H_x$  e  $c_x$ , conforme a metodologia aplicada.

### **5.2.2 Distribuições de frequência das anuidades<sup>23</sup>**

Após calcularmos as anuidades de pensão para cada matrícula, dispomo-las em distribuições de frequência, para compararmos as anuidades dos dois momentos observados (aposentadoria X referência (ou óbito)) por meio de testes de hipótese capazes de identificar se há diferença significativa entre as distribuições e, por consequência, se há impacto nas anuidades por conta das alterações familiares ocorridas entre os instantes analisados.

Para construção da distribuição de frequências, utilizamos, a princípio, a Regra de Sturges para definir o número de classes, ou seja,  $k = 1 + 3,3 * \log n$ . A partir daí, determinamos o número de classes, através da razão  $h = A/K$ , onde  $h$  é a amplitude da classe e  $A$  é a amplitude total dos dados ( $A = \text{valor máximo} - \text{valor mínimo}$ ).

Na distribuição de frequências de  $H_x$  e  $c_x$  para o primeiro grupo analisado, de aposentados vivos em 30/06/2013, chegamos ao número de classes de aproximadamente 15 e uma amplitude de classe próxima de 1,1 ( $H_x$ ) e 0,4 ( $c_x$ ). No entanto, ao observar que a maior parte das anuidades se concentram nas proximidades da média, a utilização deste tamanho e número de classes se tornou prejudicial a análise gráfica e estatística dos dados, pois as classes de menor frequência sequer seriam visualizadas.

---

<sup>23</sup> CORREA, 2003.

Assim, optamos por reduzir o número de classes até 11, aumentando sua amplitude para 1,5, no caso do  $H_x$ , e 0,5 para o  $c_x$ . Além disso, iniciamos a primeira classe de cada distribuição a partir de zero, pois a distribuição de frequências relativa a família na referência apresentaria valores zerados, nos casos de participantes que não possuíam mais nenhum beneficiário na data de referência. Ainda agrupamos as últimas duas classes, devido à baixa frequência encontrada nestas faixas.

#### *5.2.2.1 Distribuições de frequência esperadas*

Parece evidente que a distribuição das anuidades calculadas a partir da família do participante ao se aposentar não pode ser comparada diretamente com a distribuição das anuidades baseadas no cadastro familiar na data de referência. Afinal, ocorrerão mortes de beneficiários durante este período, o que é um processo natural que não pode ser descartado.

Assim, entendemos que para comparação entre a família cadastrada no ato da aposentadoria, e a família constante no cadastro na data de referência é preciso considerar as probabilidades de morte dos beneficiários do participante, chegando a uma distribuição das anuidades esperadas na data de referência.

Desta forma, estaremos mais próximos de eliminar os impactos causados pelas mortes dos dependentes, e poderemos detectar o impacto causado pelas alterações familiares isoladamente.

A anuidade  $H_x$  é calculada com base em toda família do participante. Ao excluirmos um dependente do cálculo, o  $H_x$  assumirá um novo valor, pois será recalculado com a nova formação de dependentes. Logo, cada composição familiar possível que se possa formar com os beneficiários do participante terá um único valor de  $H_x$  associado.

Consideremos como  $t$  anos o tempo decorrido entre a data de aposentadoria do participante e a data de referência – 30/06/2013. Cada dependente de idade  $x$  terá uma probabilidade de morrer ( ${}_tq_x$ ) neste período, de acordo com a função de sobrevivência utilizada no estudo. Em nosso caso, a função de sobrevivência foi construída conforme as tábuas de mortalidade AT-2000 (válidos) ou Winklevoss (inválidos).

A partir da morte de um dependente de idade  $x$ , seus dados são ignorados do cálculo do  $H_x$ , que assume um novo valor, que chamaremos de  $H_{x1}$ . Portanto, o valor de  $H_{x1}$  está diretamente associado a probabilidade de morte deste dependente no período  $t$ , conhecida como  ${}_tq_x$ .

Analogamente, o  $H_x$  calculado sob a hipótese de morte de dois dependentes do participante, sejam eles dependentes específicos de idade  $y$  e  $z$ , estará associado a probabilidade destes dois dependentes falecerem no período indicado ( ${}_tq_{xy} = {}_tq_x \cdot {}_tq_y$ ).

Portanto, para encontrar a distribuição esperada para os  $H_x$ 's na data de referência escolhida, decompomos o  $H_x$  inicial em cada valor que este pode assumir, associando estes valores a sua probabilidade de ocorrência, conforme exemplo a seguir:

### Exemplo (5.2)

Suponhamos um participante aposentado desde 2007, ou seja, que na data de referência – 30/06/2013 – já tenha completado 6 anos da sua aposentadoria. Vamos supor que sua família na aposentadoria tivesse a seguinte formação:

**Quadro 5.1 – Composição familiar de um participante tomado como exemplo**

Data Nascimento	Sexo	Vínculo	Ind. Invalidez	Idade aposentadoria
26/10/1957	F	Ex-esposa	Não	49 anos
12/11/1966	F	Esposa	Não	40 anos
04/01/1993	M	Filho	Não	14 anos

Fonte: Os autores, 2014.

O  $H_x$  considerando os três beneficiários, com as idades calculadas na data de referência, ou seja, projetando que todos sobrevivessem até aquela data, seria igual a 12,069761.

A probabilidade da primeira dependente vir a falecer entre a aposentadoria e a referência seria de  ${}_6q_{49} = 0,009475$ , e o  $H_x$  calculado sem tal dependente seria de 8,691960. Os mesmos cálculos em relação a segunda dependente resultariam num  $H_x = 7,720275$ , com chance de ocorrência de  ${}_6q_{40} = 0,004017$ .

Em nossa metodologia, consideramos que dependentes temporários não irão falecer antes de completar a maioridade do plano. Utilizamos esta premissa para facilitar os cálculos, uma vez que a probabilidade de morte deste público é muito pequena. Vale lembrar que tal hipótese também foi adotada no cálculo das anuidades, pois utilizamos anuidades financeiras para estes beneficiários.

A partir das probabilidades de morte dos dois primeiros dependentes chegamos a probabilidade de exatamente um participante falecer, que chamaremos de  $P(1)$ , sendo calculada pela seguinte fórmula:

$$P(1) = {}_6q_{46} \cdot {}_6p_{40} + {}_6q_{40} \cdot {}_6p_{46} = 0,013415. \text{ Lembrando que } {}_6p_{40} = 1 - {}_6q_{40}$$

Associaremos a probabilidade  $P(1)$  ao valor esperado para  $H_x$ , considerando a morte de um participante. Para chegar ao valor esperado, usaremos primeiramente o conceito de probabilidade condicional.

Segundo Meyer (2009), define-se a probabilidade de B ocorrer dado que A ocorreu,  $P(B|A)$ , pela seguinte relação:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (5.1)$$

De posse das probabilidades de morte e sobrevivência das duas dependentes vitalícias, podemos elaborar o seguinte quadro:

**Quadro 5.2 – Probabilidade de morte e sobrevivência dos dependentes vinculados ao participante tomado como exemplo**

Probabilidades	Dependente 1	Dependente 2	Total
Falecer	0,009475	0,004017	0,013492
Sobreviver	0,990525	0,995983	1,986508
Total	1	1	2

Fonte: Os autores, 2014.

Sabendo que um dependente faleceu, qual a probabilidade de que este dependente seja o Dep. 1?

Através do quadro acima e do conceito de probabilidade condicional apresentado, podemos chegar ao resultado facilmente, da seguinte forma:

$$P(\text{Dep1} | F) = \frac{P(\text{Dep1} \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{0,009475}{2}}{\frac{0,013492}{2}} = 0,702268$$

De maneira análoga,  $P(\text{Dep2} | F) = 0,297732$

Agora sabemos a chance de cada dependente vitalícia ser a falecida, dado que uma dependente faleceu. Com esta informação, podemos encontrar um valor esperado para  $H_x$ , sob a hipótese de que um único dependente faleceu.

Para encontrar o  $H_x$  esperado utilizamos o conceito de valor esperado apresentado por Meyer (2009), conforme segue:

Definição: Seja  $X$  uma variável aleatória discreta, com valores possíveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Seja  $p(x_i) = P(X=x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Então, o valor esperado  $X$ , denotado por  $E(X)$  é definido como



$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i) \quad (5.2)$$

Daí, o valor esperado para  $H_x$  dado que um único dependente faleceu será igual a:

$$E(H_x | 1) = H_{x1} \cdot P(D1|1) + H_{x2} \cdot P(D2|1) \cong 8,6919 \cdot 0,7022 + 7,7202 \cdot 0,2977 = 8,402682$$

Portanto, associaremos a probabilidade de morte de exatamente 1 dependente ao  $H_x$  ora calculado.

$$H_x = 8,402682, P(1) = 0,013415$$

E caso dois beneficiários venham a falecer? Poderíamos optar pelo mesmo procedimento adotado para a morte de um beneficiário, mas para facilitar os cálculos, e tendo em vista que a chance de dois dependentes falecerem num período curto de tempo é ínfima, optamos por associar à probabilidade de dois dependentes falecerem ao  $H_x$  calculado após a morte dos dois beneficiários mais velhos, ou seja, aqueles com maior chance de vir a óbito.

O mesmo procedimento foi adotado para associação da probabilidade de morte de três dependentes. Associamos ao  $H_x$  calculado sem os três dependentes vitalícios mais velhos.

No exemplo em questão, calculamos a probabilidade de morte da ex-esposa e da esposa no período de 6 anos, e associamos ao valor do  $H_x$  considerando apenas o beneficiário temporário. A associação foi a seguinte:

$$H_x = 1,450199, P(2) = 0,000038.$$

Sabemos que se nenhum dependente falecer, o  $H_x$  não sofrerá alteração em seu valor, portanto podemos associar o  $H_x$  inicial à probabilidade de nenhum dependente falecer, conforme segue:

$$H_x = 12,069761, P(0) = 0,986546.$$

Em nosso exemplo, o suposto participante representaria uma unidade na faixa de  $H_x$  entre 12 e 13,5, na distribuição dos  $H_x$ 's calculados com os dados da aposentadoria, sem nenhuma probabilidade de morte associada.

Já em nossa proposta para distribuição esperada, os possíveis valores de  $H_x$  para este participante foram distribuídos conforme suas probabilidades de ocorrência, ou seja, este participante seria distribuído da seguinte forma:

0,9865464 seria incluído na faixa entre 12 e 13,5;

0,0131455 seria incluído na faixa entre 7,5 e 9 e;

0,0000381 seria incluído na faixa entre 0 e 1,5.

O procedimento apresentado no exemplo (5.2) foi efetuado para todos os participantes da base de dados, até chegarmos a distribuição esperada para os  $H_x$ 's. Da mesma forma chegamos a distribuição esperada para os  $c_x$ 's.

### 5.2.3 Distribuição observada X Distribuição esperada – Teste de hipótese

Para cumprir com o objetivo de identificar se as alterações familiares de aposentados são significantes, comparamos a distribuição esperada para as anuidades de pensão, com as distribuições observadas, ambas apuradas na data de referência – 30/06/2013, para os aposentados vivos, e na data do óbito para aqueles que faleceram.

Além da análise gráfica, utilizamos o teste de  $X^2$  (qui-quadrado) para determinar se a distribuição observada é aderente a esperada, ou se há diferença significativa entre as duas, partindo da hipótese nula de que são aderentes.

Segundo Siegel (1975), a prova de  $X^2$  pode ser empregada para comprovar se existe diferença significativa entre o número observado de indivíduos, ou de respostas, em determinada categoria, e o respectivo número esperado, baseado na hipótese de nulidade. A técnica de  $X^2$  testa se as frequências observadas estão suficientemente próximas das esperadas para justificar sua ocorrência sob  $H_0$  (hipótese nula).

A hipótese de nulidade pode ser testada por:

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}, \quad (5.3)$$

onde:

$O_i$  = número de casos observados na categoria  $i$

$E_i$  = número de casos esperados na categoria  $i$ , sob  $H_0$ .

Ainda segundo Siegel (1975), se há concordância entre os valores observados e os valores esperados, as diferenças  $(O_i - E_i)$  serão pequenas e, conseqüentemente,  $X^2$  será também pequeno. Se as divergências são grandes,  $X^2$  também será grande. De modo intuitivo, quanto maior for o valor de  $X^2$ , maior será a probabilidade de as frequências observadas não serem aderentes a distribuição populacional que baseou a hipótese de nulidade.

### 5.2.4 Reserva matemática de benefícios concedidos

Conforme Rocha (2001), A Reserva Matemática de Benefícios Concedidos (RMBC) se refere às obrigações relativas aos participantes aposentados e pensionistas do Plano de Benefícios. É constituída pelos encargos de aposentadoria e pensão para os participantes aposentados por benefício programado, e encargos de aposentadoria e pensão para os participantes aposentados por invalidez. Para os pensionistas, é calculado o montante necessário para pagar o complemento de pensão até o falecimento, para os beneficiários vitalícios, ou até atingirem a maioridade (24 anos, no caso do nosso plano), no caso dos beneficiários temporários.

Aqui em nosso estudo vamos nos ater aos encargos de pensão do aposentado programado e ao encargo de pensão do pensionista, que são calculados pelas seguintes fórmulas:

- Encargo de pensão do aposentado programado

$$\text{Individual: Enc. Pens.Progr}_k = 13 \cdot FC \cdot VB \cdot c_x^{(12)} \quad (5.4)$$

$$\text{Total: Enc. Pens.Progr} = \sum_{k=1}^N \text{Enc. Pens.Progr}_k$$

- Encargo de pensão do pensionista

$$\text{Individual: Enc. Pensao}_k = 13 \cdot FC \cdot VB \cdot H_x \quad (5.5)$$

$$\text{Total: Enc. Pensao} = \sum_{k=1}^N \text{Enc. Pensao}_k$$

Onde  $N$  é o número de beneficiários analisados,  $x$  é a idade do participante sobre o qual o encargo está sendo calculado individualmente,  $FC$  é o fator de capacidade do benefício em função da inflação de longo prazo e  $VB$  é o valor do benefício do participante.

Em relação aos participantes do grupo 1, ou seja, que sobreviveram até a data de referência dos cálculos – 30/06/2013, fizemos dois exercícios. O primeiro foi verificar a diferença entre os Encargos de Pensão dos aposentados programados sob duas óticas distintas. Primeiramente calculando-o com o  $c_x$  esperado na referência, e em seguida com  $c_x$  observado na referência.

O segundo exercício foi do mesmo tipo, porém supomos a morte de todos os participantes na data de referência, fazendo uma comparação entre os Encargos de Pensão dos pensionistas, que utilizam a anuidade  $H_x$  ao invés de  $c_x$ .

Ambos os exercícios tem como objetivo identificar o potencial do impacto causado pelas alterações familiares sobre as anuidades de pensão. Por conta disso, não nos preocupamos com as variáveis Fator de Capacidade do Benefício (FC) e Valor do Benefício do Aposentado (VB). Para ambas as variáveis consideramos o valor de uma unidade.

Em relação ao segundo grupo, daqueles que faleceram entre a aposentadoria e a data de referência, fizemos apenas o exercício do Encargo de Pensão dos Pensionistas, visto que os participantes realmente já faleceram.

Neste caso, apesar de também somarmos os encargos de cada falecido, as anuidades  $c_x$  não foram calculadas com a mesma data de referência. Cada  $c_x$  foi calculado na data de óbito do participante. Tal procedimento foi adotado para conseguirmos verificar, de forma isolada, a influência da alteração familiar sobre o encargo. Se fizéssemos os cálculos em uma data de referência posterior ao óbito, teríamos a influência do tempo entre a morte e a referência, em função, por exemplo, da maioridade de beneficiários temporários.

Para pôr em prática os exercícios citados acima, voltamos ao conceito de Valor Esperado de uma variável aleatória, apresentado no exemplo 5.2 do item 5.2.2.1 deste projeto. Naquele item, construímos as distribuições esperadas decompondo o  $H_x$  (ou  $c_x$ ) de cada participante nos possíveis valores que poderia assumir até a data de referência, com suas respectivas probabilidades de ocorrência associadas. Já no cálculo dos encargos, utilizamos o  $H_x$  (ou  $c_x$ ) esperado como um resultado dos  $H_x$ 's (ou  $c_x$ 's) possíveis.

Utilizando a mesma família do exemplo 5.2, encontramos o  $H_x$  esperado da seguinte forma:

$$H_x = 12,069761 * 0,986546 + 8,402682 * 0,013415 + 1,450199 * 0,000038 = 12,020161.$$

O  $H_x$  teria este valor esperado, tendo em vista que as probabilidades de continuar com o mesmo valor calculado com a família da aposentadoria (12,069761), de assumir o valor de 8,402682 e, de assumir valor igual a 1,450199, seriam respectivamente 98,6546%, 1,3415% e 0,0038%.

### **5.3 Resultados e análises sobre as anuidades de pensão**

Neste capítulo apresentamos os resultados deste estudo em relação as anuidades atuariais de pensão, bem como dos encargos calculados através destas anuidades. Separamos a análise de acordo com os grupos estudados. Grupo 1 – aposentados que sobreviveram até a data de referência e Grupo 2 – aposentados falecidos entre a aposentadoria e a data de referência.

### 5.3.1 Aposentados vivos até a data de referência

Começamos nossa análise pela anuidade  $c_x$ , utilizada nos cálculos de encargo de pensão de aposentados programados. Abaixo seguem as distribuições de frequência dos  $c_x$ 's na aposentadoria, e na referência (esperada e observada):

**Tabela 5.1 – Distribuição de frequências dos  $C_x$ 's na aposentadoria, e na data de referência (observada e esperada)**

$C_x$	Frequência		
	Aposentadoria	Referência - observada	Referência - esperada
0,5	918	1651	1633,00
1	1601	1536	1524,83
1,5	6356	5989	6070,98
2	6508	6251	6370,43
2,5	7957	7697	7807,79
3	2514	2503	2466,51
3,5	708	791	694,22
4	206	283	202,61
4,5	64	110	62,07
Mais	13	34	12,56

Fonte: Os autores, 2014.

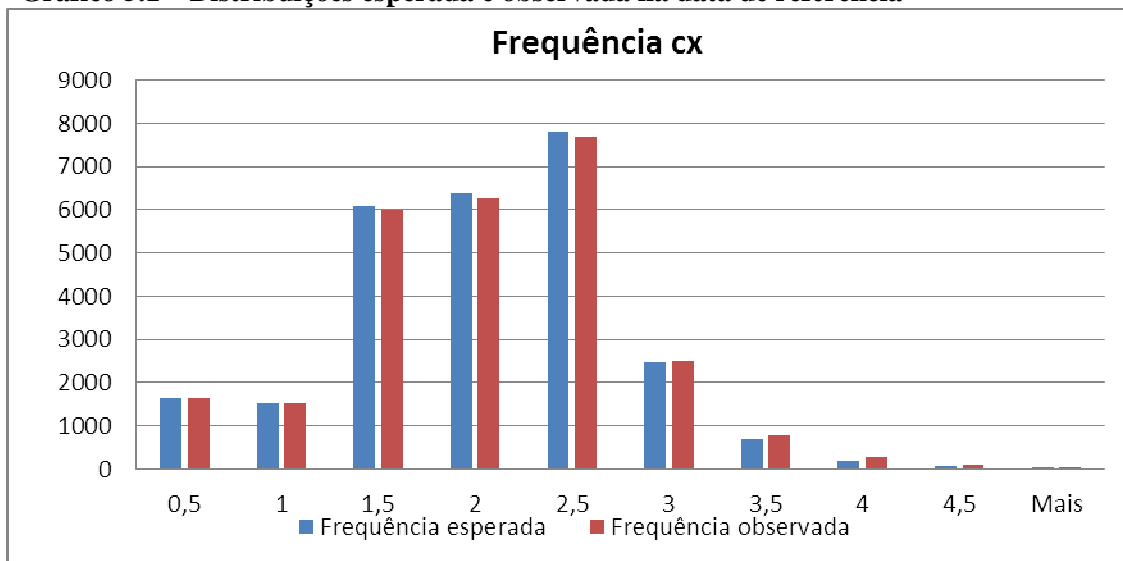
Um fato interessante na tabela acima é o grande número de anuidades na data de referência que figuram na faixa de valores menores que 0,5. A tabela demonstra que tal evento já era esperado, refletindo a grande quantidade de  $c_x$ 's que assumem valor igual a zero, devido a morte de todos os dependentes cadastrados. Foram 605 participantes que deixaram de ter beneficiários indicados entre a data de aposentadoria e de referência.

Na verdade, o alto número de participantes que deixam de ter dependentes cadastrados se explica pelo fato de a maioria dos participantes ter apenas um dependente ao se aposentar (68,5% dos aposentados).

Analisando a tabela acima é possível perceber que as maiores diferenças entre a frequência esperada e observada ocorrem nas faixas superiores a 3,5. Afinal, a frequência esperada é construída considerando apenas as mortes de beneficiários e, portanto, não prevê crescimento no valor do  $c_x$ . A frequência observada demonstra que alguns participantes constituem famílias mais onerosas após a aposentadoria. Resta saber se a quantidade de ocorrências deste tipo é suficiente para impactar o plano.

Vejamos o gráfico das distribuições esperada e observada na data de referência:

**Gráfico 5.1 – Distribuições esperada e observada na data de referência**



Fonte: Os autores, 2014.

A análise gráfica nos remete a uma sensação de igualdade entre as duas distribuições. As diferenças não se mostram relevantes. Percebe-se um grande equilíbrio nas faixas até 3, e uma tímida superioridade nas frequências observadas de categorias maiores que 3.

Façamos então, conforme disposto na metodologia deste trabalho, o teste de  $X^2$  com a seguinte hipótese de Nulidade:

$H_0$ : Não há diferença entre as distribuições de  $c_x$ 's observada e esperada.

$H_1$ : As frequências esperada e observada não são iguais.

Utilizamos como nível de significância  $\alpha = 0,01$ , ou seja, assumimos uma chance de apenas 1% de rejeitar  $H_0$ , quando ela é verdadeira. Assumimos apenas 1% por entendermos que é normal haver alguma diferença entre as distribuições, até porque outros fatores que não são as alterações familiares podem influenciar na desigualdade entre as distribuições, como por exemplo, as ocorrências de morte de dependentes não estarem aderentes às previstas pela Tábua AT-2000 (válidos) ou Winklevoss (inválidos), utilizadas no estudo.

Quanto aos graus de liberdade, são 9, tendo em vista que são 10 categorias.

O resultado de  $X^2$  é igual a 124,7256241, razoavelmente superior ao valor tabelado para não se rejeitar a hipótese nula, de 21,67. Analisando o resultado de  $X^2$  classe a classe da distribuição, percebe-se que as maiores diferenças se localizam nas faixas iguais ou superiores a 3,5, assim como a análise gráfica já sugeria, indicando que há um certo número de participantes que substituem suas famílias após a aposentadoria, tornando-as mais onerosas para o plano. Veja o resultado de  $X^2$  por categoria:

**Tabela 5.2 – Resultado de  $X^2$  por categoria**

Cx	$X^2$
0,5	0,198345508
1	0,081793281
1,5	1,107067849
2	2,238857176
2,5	1,572083888
3	0,539819799
3,5	13,49302562
4	31,90093302
4,5	37,00268505
Mais	36,59101289

Fonte: Os autores, 2014.

A diferença observada entre as distribuições se explica principalmente pelo número de participantes que aumentam sua família após a aposentadoria, seja pelo nascimento de um filho, pela inscrição de uma nova esposa no rol de beneficiários, etc. De 26845 aposentados analisados, 723 (2,69%) aumentaram a quantidade de beneficiários após a aposentadoria. Além destes, mais 193 (0,72%) participantes alteraram o grupo familiar por um mais oneroso ao plano.

Sabendo que existe diferença entre as distribuições, torna-se primordial analisar o grau de impacto sobre o Encargo de Pensão dos aposentados programados. Calculamos então o encargo, primeiramente com o  $c_x$  esperado, e posteriormente com o  $c_x$  observado. Os resultados foram os seguintes:

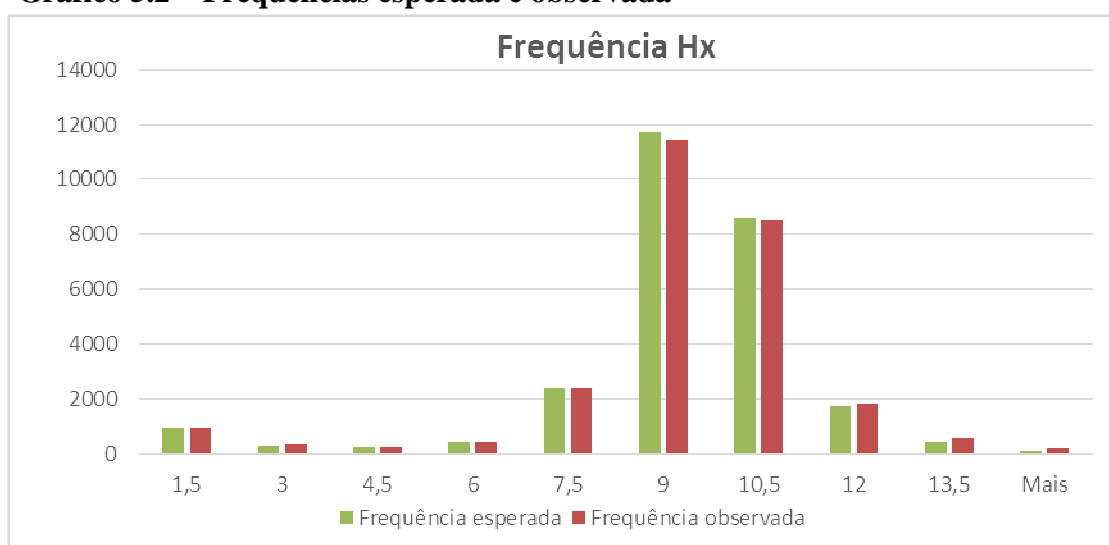
Encargo com a família esperada na referência: R\$ 47.588,76;

Encargo com a família observada na referência: R\$ 48.079,12.

O encargo observado se mostra maior que o esperado, mas com uma diferença de apenas 1,03%, que não chega a ser um impacto relevante.

Como exercício e afim de melhorar as conclusões sobre os impactos das alterações familiares sobre as anuidades de pensão, supomos a morte de todos os aposentados na data de referência e procedemos a análise do  $H_x$  da família vinculada a cada um, pelo mesmo método de análise adotado para o  $c_x$ . Vejamos a análise gráfica:

**Gráfico 5.2 – Frequências esperada e observada**



Fonte: Os autores, 2014.

Assim como na experiência com o  $c_x$ , as primeiras faixas apresentam equilíbrio entre as frequências esperada e observada, com uma acanhada superioridade para a frequência observada na faixa até 1,5. Nas faixas intermediárias, entre 7,5 e 10,5, a frequência observada se mostra inferior a esperada, provavelmente por um deslocamento para as faixas superiores a 10,5.

Utilizando a mesma hipótese de nulidade adotada no teste de  $X^2$  para o  $c_x$ , bem como o mesmo nível de significância e o mesmo número de graus de liberdade,



chegamos ao valor de  $X^2 = 196,01$ , contra o valor limite para não rejeição de 21,67. Rejeita-se, portanto a hipótese de que as distribuições esperada e observada são iguais.

Vejamos agora como ficaria o Encargo de pensão dos pensionistas confrontando a família observada com a esperada:

Encargo com a família esperada na referência: R\$ 226.666,62;

Encargo com a família observada na referência: R\$ 227.839,74.

O Encargo observado supera o esperado em apenas 0,52%, demonstrando que o fato de as distribuições não serem iguais não representa, necessariamente, um grande impacto nos encargos de pensão. Afinal, apesar de algumas famílias apresentarem-se mais onerosas, outras se mostram com custo menor que o esperado.

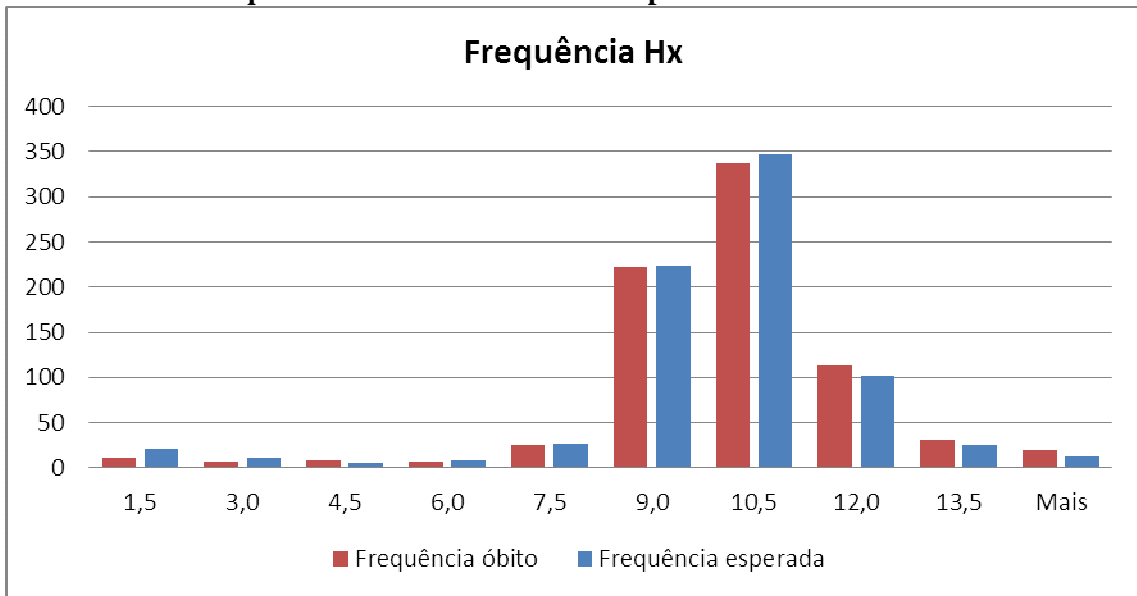
### ***5.3.2 Aposentados falecidos entre a aposentadoria e a referência***

Vejamos agora os resultados do  $H_x$  das famílias dos participantes que faleceram entre a data de aposentadoria e a data de referência – 30/06/2013. Este resultado é muito importante, pois demonstram as diferenças entre a família cadastrada na aposentadoria e aquela que realmente teve direito a pensão, sem a influência de participantes que não atualizam o cadastro durante a vigência de sua aposentadoria.

O total de falecidos analisados foi de 781. Destes, 43 tiveram aumento no número de dependentes na pensão em relação a aposentadoria, representando um percentual de 5,5% do total, bem superior aos 2,69% entre os aposentados vivos. Além disso, 12 participantes (1,54%) apresentaram famílias mais onerosas ao plano, apesar do mesmo número de participantes.

Os resultados acima acendem um sinal de alerta em relação aos encargos de pensão de aposentados. Afinal, a falta de atualização dos beneficiários de pensão por parte deste público pode gerar cálculos de reserva subestimados.

Vamos a análise gráfica:

**Gráfico 5.3 – Frequência dos óbitos ocorridos e esperados**

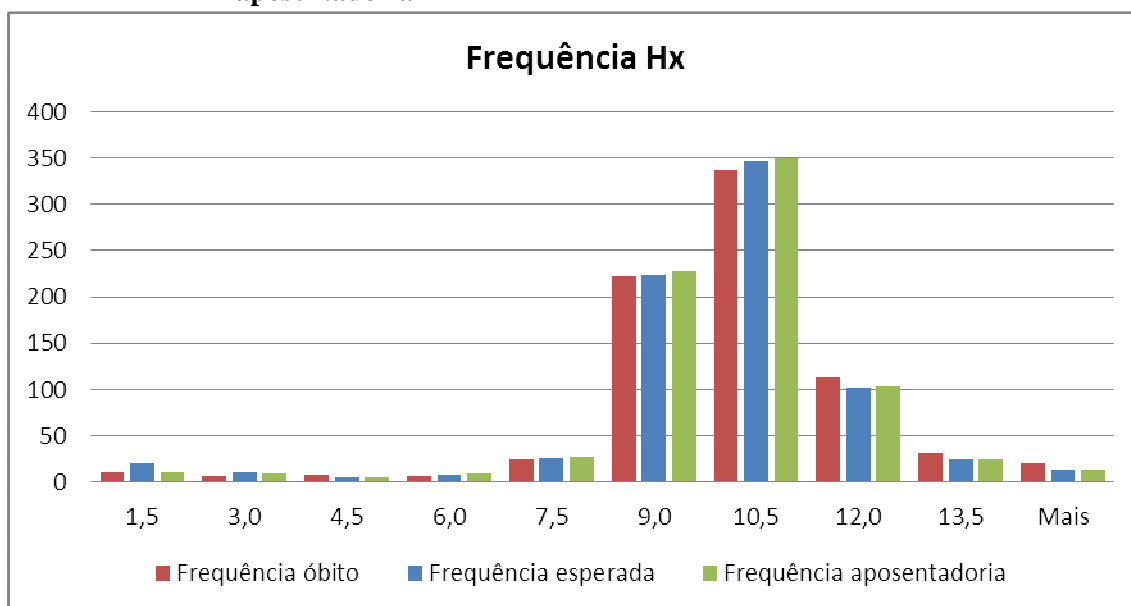
Fonte: Os autores, 2014.

Comparando este gráfico aos dois últimos apresentados neste trabalho, temos a nítida sensação de uma diferença maior entre as frequências apresentadas, porém deve-se observar que a escala deste gráfico é bem menor, e que diferenças visualmente grandes podem ser irrelevantes. Analisemos a diferença entre estas distribuições através do teste de  $X^2$ , sob a mesma metodologia adotada no item anterior.

O valor calculado para  $X^2$  foi igual a 14,2511, inferior ao limite de rejeição de 21,67 ao nível de significância de 0,01 com 9 graus de liberdade, ou seja, não se rejeita a hipótese de que as distribuições são iguais.

Um fator interessante da distribuição observada no óbito dos participantes é a sua proximidade da distribuição na aposentadoria, até mais que da distribuição esperada, principalmente pela igualdade na primeira faixa, até 1,5, que é o principal descasamento entre a distribuição observada e a esperada. Veja o gráfico a seguir:

**Gráfico 5.4 – Frequência dos óbitos ocorridos e esperados e a distribuição na aposentadoria**



Fonte: Os autores, 2014.

O teste de  $X^2$  resultou igual a 10,1134 neste caso, ainda menor que o resultado da comparação entre as frequências observada e esperada no óbito.

O cálculo dos Encargos de Pensão dos Pensionistas deixa mais evidente esta conclusão. Vejamos:

- Esperada X Observada (ambas no óbito):  
Encargo com a família esperada: R\$ 7.134,17;  
Encargo com a família observada: R\$ 7.321,85.  
Diferença: 2,63%
- Família da aposentadoria X Família no óbito:  
Encargo com a família da aposentadoria: R\$ 7.226,95;  
Encargo com a família observada no óbito: R\$ 7.321,85.  
Diferença: 1,31%

Nota-se que há um aumento no encargo de pensão, inclusive em relação ao encargo calculado com a família na aposentadoria, demonstrando que existe o impacto das alterações familiares apesar da relativa proximidade das distribuições.

## 6 CONCLUSÃO

Os resultados apresentados neste trabalho estão de acordo com a suposição inicial de que eventuais alterações percebidas na composição do grupo familiar durante a vigência da aposentadoria geram custos ao Plano. Entretanto, trata-se de fenômeno com baixo grau de intensidade, refletindo em custos relativamente pequenos, passíveis de serem cobertos pela existência de uma Reserva de Contingência.

Uma alternativa igualmente viável para a cobertura desse custo parte da realização do cálculo dos encargos de pensão dos aposentados utilizando-se as mesmas famílias consideradas no cálculo do benefício de aposentadoria.

Em termos de resultados numéricos, as alterações familiares ocorridas ao longo do tempo provocaram impactos inferiores a 1,5% sobre o resultado esperado para os encargos de pensão de aposentados programados.

Destaca-se, ainda, que as anuidades de pensão calculadas com base na família do aposentado na data de seu óbito apresentaram distribuições de frequência muito semelhantes às distribuições das anuidades calculadas com base na família da aposentadoria. Comparativamente, o encargo de pensão calculado com a família constante no momento do óbito mostrou-se 1,31% superior ao encargo calculado com a família da aposentadoria.

Esse resultado, no entanto, deve ser ponderado pelas limitações estatísticas inerente ao estudo realizado, já que a amostra escolhida contemplou apenas os participantes aposentados a partir de 1998. É esperado que a análise de uma massa de aposentados observados em um período superior a 15 anos apresente impactos mais relevantes no que tange a alteração do grupo familiar. Contudo, os resultados encontrados demonstram que o impacto de alterações nos grupos familiares não inflama a discussão em níveis preocupantes, dispensando a realização de estudos sofisticados para viabilização do cálculo dos encargos.

## REFERÊNCIAS

ADMINISTRADORES. O portal da Administração. **Planos de benefício definido:** não disponíveis, mesmo com interesse dos clientes. Abril de 2007. Disponível em: <<http://www.administradores.com.br/noticias/administracao-e-negocios/planos-e-beneficio-definido-nao-disponiveis-mesmo-com-interesse-dos-clientes/10173/#>>. Acesso em: 03 ago. 2013.

BRASIL. Conselho de Previdência Complementar. **Resolução CNPC nº 9, de 29 de novembro de 2012.** Altera a Resolução nº 18, de 28 de março de 2006, do Conselho de Gestão de Previdência Complementar, que estabelece parâmetros técnicos-atuariais para estruturação de plano de benefícios de entidades fechadas de previdência complementar, e dá outras providências. In: SISLEX: Sistema de Legislação, Jurisprudência e Pareceres da Previdência e Assistência Social. [S.l.]: DATAPREV, 2012. Disponível em: <[http://www.previdencia.gov.br/arquivos/office/1\\_130124-141537-458.pdf](http://www.previdencia.gov.br/arquivos/office/1_130124-141537-458.pdf)>. Acessado em: 18 mar. 2014.

BRASIL. Conselho de Previdência Complementar. **Resolução MPAS/CGPC nº 18, de 28 de março de 2006.** Estabelece parâmetros técnicos-atuariais para estruturação de plano de benefícios de entidades fechadas de previdência complementar, e dá outras providências. In: SISLEX: Sistema de Legislação, Jurisprudência e Pareceres da Previdência e Assistência Social. [S.l.]: DATAPREV, 2006. Disponível em: <<http://www3.dataprev.gov.br/SISLEX/paginas/72/MPS-CGPC/2006/18.htm>>. Acessado em: 26 ago. 2014.

BRASIL. Constituição (1988). **Constituição da República Federativa do Brasil.** Brasília, DF: Senado Federal, 1988. Disponível em: <<http://www3.dataprev.gov.br/sislex/paginas/22>>. Acesso em: 26 ago. 2013.

BRASIL. Constituição (1988). Emenda Constitucional nº 20, de 15 de dezembro de 1998. Modifica o sistema de previdência social, estabelece norma de transição e dá outras providências. **Lex:** legislação federal e marginária. Brasília, DF, 16 dez. 1998. Disponível em: <<http://www3.dataprev.gov.br/sislex/paginas/30/1998/20.htm>>. Acesso em: 26 ago. 2013.

CARVALHO, Gilvan Nogueira. Introdução ao direito previdenciário: os regimes de previdência. **Âmbito Jurídico**, Rio Grande, v. 15, n. 98, mar. 2012.

CORREA, Sonia Maria Barros Barbosa. **Probabilidade e estatística.** 2. ed. Belo Horizonte: PUC Minas Virtual, 2003.

FERRARI, Augusto T.; BORGES, Paulo R.; FREITAS, Wanderley. **Entendendo a previdência complementar:** complexidade e desafios. [S.l.: s.n.], 2004.

GAMA, Paulo Josef Gouvêa da. **Resolução CGPC nº 18, de 28 de março de 2006.** [S.l.] Rodarte Nogueira & Associados. Disponível em: <<http://siteantigo.rodartenogueira.com.br/artigos/CGPC18.pdf>>. Acessado em: 19 mar. 2014.

GITMAN, Lawrence J. **Princípios de administração financeira essencial**. 2. ed. São Paulo: Bookman Editora, 2006.

JORDAN, C.W. **Life contingencies**. Chicago: Society of Actuaries, 1967.

Meyer, Paul L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

MINISTÉRIO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL. **Fundos de Pensão: coletânea de normas**. Brasília: MPS, SPPC, 2012.

NEVES, César da R.; MIGON, Hélio dos S. Graduação bayesiana de taxas de mortalidade: uma aplicação na cobertura de sobrevivência e na avaliação da provisão matemática. **Revista Brasileira de Risco e Seguro**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 0, p.90-111, dez. 2004.

PINHEIRO, Ricardo P. **A demografia dos fundos de pensão**. Brasília: MPS; SPPC, 2007.

PINHEIRO, Ricardo P. **Riscos demográficos e atuariais nos planos de benefício definido e de contribuição definida num fundo de pensão**. 2005. 296f. Tese (Doutorado em Demografia)–Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2005. Disponível em: <[http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/MCCR-6W9PQK/ricardo\\_pena\\_pinheiro.pdf?sequence=1](http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/MCCR-6W9PQK/ricardo_pena_pinheiro.pdf?sequence=1)>. Acesso em: 13 ago. 2013.

ROCHA, Cleide Barbosa da. **Análise do modelo estocástico do passivo atuarial de um fundo de pensão**. Dissertação (Mestrado em Administração de Empresas)–Departamento de Administração, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

RODRIGUES. José A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Ed. Saraiva, 2008.

SIEGEL, Sidney. **Estatística não-paramétrica para as ciências do comportamento**. São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil, 1975.

VERGARA, Sylvia C. **Projetos e relatórios de pesquisa em administração**. 2. ed. São Paulo: Ed. Atlas, 1998.

VILLALÓN, Julio G. **Operaciones de seguros clásicas y modernas**. Madrid: Ediciones Pirámide, 1997.

## APÊNDICE 1 – Exemplo ilustrativo da metodologia utilizada neste projeto para o cálculo das anuidades $H_x$ e $c_x$

Suponhamos o seguinte participante do grupo 1, dos aposentados sobreviventes até a data de referência – 30/06/2013.

### Quadro A1.1 – Dados do aposentado

Data de Nascimento	Sexo	Data de Aposentadoria	Idade na referência
06/06/1952	M	06/08/1999	61 anos

Fonte: Os autores, 2014.

### Quadro A1.2 – Dados de seus beneficiários selecionados na data de aposentadoria: família 1

Dt. de Nascimento	Sexo	Vínculo	Ind. de invalidez	Idade na referência
07/06/1977	F	Esposa	Não	36 anos
11/09/1989	F	Filha	Não	23 anos
27/02/1999	M	Filho	Não	14 anos

Fonte: Os autores, 2014.

### Quadro A1.3 – Dados de seus beneficiários selecionados na data de referência: família 2

Dt. de Nascimento	Sexo	Vínculo	Ind. de invalidez	Idade na referência
07/06/1977	F	Esposa	Não	36 anos
11/09/1989	F	Filha	Não	23 anos
27/02/1999	M	Filho	Não	14 anos
29/11/2002	F	Filha	Não	10 anos

Fonte: Os autores, 2014.

Lembramos que o cálculo do  $H_x$  é efetuado pela seguinte função:  $H_x = 0,5 \cdot a_{gr} + 0,1 \cdot \sum_{t=1}^5 a_{indt}$ . Portanto, precisamos encontrar o valor da anuidade do grupo e cada uma das anuidades individuais, de acordo com a metodologia proposta. Vejamos inicialmente o cálculo de  $H_x$  para a família 1:

Trata-se de uma família composta por uma beneficiária vitalícia (esposa) e mais dois beneficiários temporários (dois filhos válidos). Daí, segundo a metodologia proposta,

utilizaremos a fórmula da anuidade grupal igual a  $a_{gr} = a_{\overline{24-y}|} + {}_{24-y}/a_z$ , sendo  $y$  a idade do dependente temporário mais novo e  $z$  a idade do beneficiário vitalício mais novo. (Vide item 2.3.2.3 deste projeto)

Neste exemplo, em particular, a anuidade grupal seria calculada da seguinte forma:

$a_{gr} = a_{\overline{24-14}|} + {}_{24-14}/a_{36} = a_{\overline{10*12}|_m} + {}_{10}/a_{36}^{(12)} = a_{\overline{120}|_m} + {}_{10}/a_{36}^{(12)}$ . Repare que a anuidade grupal considera pagamentos mensais por um período certo de 10 anos, tempo que o dependente temporário mais novo levará para perder a condição de beneficiário, por maioridade, e após este período considera a anuidade atuarial vitalícia da esposa, também com pagamentos mensais.

De posse da anuidade grupal, é hora de calcular as anuidades individuais para aplicação na fórmula do  $H_x$ . Vale lembrar que a metodologia adota anuidades financeiras para os dependentes temporários e atuariais para os vitalícios, ou seja, não considera a probabilidade de morte dos primeiros.

Para fins didáticos, utilizaremos nas anuidades financeiras, a simbologia adotada para anuidades com pagamentos anuais, apesar de considerarmos pagamentos mensais no cálculo.

Portanto, as anuidades individuais seriam as seguintes:  $a_{36}^{(12)}$ ,  $a_{\overline{10}|}$  e  $a_{\overline{1}|}$ . Portanto, chegaríamos ao  $H_x$  da seguinte forma:

$$H_x = 0,5 \cdot (a_{\overline{10}|} + {}_{10}/a_{36}^{(12)}) + 0,1 \cdot (a_{36}^{(12)} + a_{\overline{10}|} + a_{\overline{1}|}) \quad (A1.1)$$

De maneira análoga, chegaríamos ao  $H_x$  da família 2 da mesma forma, uma vez que o grupo familiar se enquadra no mesmo tipo da família 1, ou seja, com um ou mais beneficiários vitalícios (esposa) e um ou mais beneficiários temporários (três filhos válidos). Daí, o resultado para o  $H_x$  da família 2 seria:

$$H_x = 0,5 \cdot (a_{\overline{14}|} + {}_{14}/a_{36}^{(12)}) + 0,1 \cdot (a_{36}^{(12)} + a_{\overline{10}|} + a_{\overline{1}|} + a_{\overline{14}|}) \quad (A1.2)$$

Observe agora o cálculo do  $c_x$  considerando a família 1. Lembrando que esta anuidade pondera as probabilidades de morte e sobrevivência do próprio participante, além dos dados de seus beneficiários, e representa o pagamento de  $H_x$  a partir de cada possível momento de morte do participante.



A fórmula de  $c_x$  é a seguinte:

$$c_x^{(12)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \cdot {}_t p_x \cdot q_{x+t} \cdot H_{x+t} \quad (\text{A1.3})$$

Sendo  $x$  a idade do participante,  $t$  a variação do tempo em anos, e  $\omega$  a última idade da tábua, que no caso da tábua de mortalidade de válidos utilizada neste estudo – AT-2000 – se dá aos 115 anos de idade, independente do sexo.

Logo, para a família 1, chegaríamos ao valor de  $c_x$  da seguinte maneira:

$$c_{61}^{(12)} = v^0 \cdot q_{61} \cdot H_{61} + v^1 \cdot p_{61} \cdot q_{62} \cdot H_{62} + v^2 \cdot {}_2 p_{61} \cdot q_{63} \cdot H_{63} + \dots + v^{54} \cdot {}_{54} p_{61} \cdot q_{115} \cdot H_{115}, \quad (\text{A1.4})$$

Onde

$H_{61}$  é o próprio  $H_x$  calculado anteriormente, ou seja,

$$H_{61} = 0,5 \cdot (a_{\overline{10}|} + {}_{10}a_{36}^{(12)}) + 0,1 \cdot (a_{36}^{(12)} + a_{\overline{10}|} + a_{\overline{1}|})$$

$$H_{62} = 0,5 \cdot (a_{\overline{9}|} + {}_9 a_{37}^{(12)}) + 0,1 \cdot (a_{37}^{(12)} + a_{\overline{9}|});$$

$$H_{63} = 0,5 \cdot (a_{\overline{8}|} + {}_8 a_{38}^{(12)}) + 0,1 \cdot (a_{38}^{(12)} + a_{\overline{8}|});$$

...

$$H_{115} = 0,5 \cdot (a_{90}^{(12)}) + 0,1 \cdot (a_{90}^{(12)}).$$

Observa-se que o  $H_x$  varia ao longo do tempo, através do aumento das idades dos beneficiários e da exclusão dos beneficiários temporários no seu devido momento.

O  $c_x$  para a família 2 é calculado de maneira análoga.

Além disso, supondo que o participante citado neste exemplo pertencesse ao grupo 2 – dos aposentados que faleceram entre a aposentadoria e a referência, não haveria qualquer distinção no cálculo do  $H_x$ . Apenas não seria calculada a anuidade  $c_x$ , que como já dito, não se aplica a participantes falecidos.

### ANEXO 1 – Tábuas biométricas e comutações utilizadas nos cálculos

<i>Mortalidade e Comutações provenientes da AT-2000 Masculina com juros de 5%</i>					
<b>x</b>	<b>qx</b>	<b>dx</b>	<b>lx</b>	<b>Dx</b>	<b>Nx</b>
0	0,002311	2311,000	1000000,000	1000000,000	20317674,535
1	0,000906	903,906	997689,000	950180,000	19317674,535
2	0,000504	502,380	996785,094	904113,464	18367494,535
3	0,000408	406,483	996282,714	860626,467	17463381,072
4	0,000357	355,528	995876,231	819309,840	16602754,604
5	0,000324	322,549	995520,703	780016,520	15783444,765
6	0,000301	299,555	995198,154	742632,185	15003428,245
7	0,000286	284,541	994898,600	707055,860	14260796,059
8	0,000328	326,233	994614,059	673193,945	13553740,199
9	0,000362	359,932	994287,825	640926,797	12880546,254
10	0,000390	387,632	993927,893	610185,507	12239619,457
11	0,000413	410,332	993540,261	580902,414	11629433,951
12	0,000431	428,039	993129,929	553011,906	11048531,537
13	0,000446	442,745	992701,890	526451,007	10495519,631
14	0,000458	454,455	992259,145	501158,295	9969068,624
15	0,000470	466,148	991804,690	477075,014	9467910,329
16	0,000481	476,834	991338,542	454143,608	8990835,315
17	0,000495	490,477	990861,708	432309,681	8536691,707
18	0,000510	505,089	990371,232	411519,703	8104382,026
19	0,000528	522,649	989866,142	391723,645	7692862,323
20	0,000549	543,150	989343,493	372873,157	7301138,678
21	0,000573	566,583	988800,343	354922,333	6928265,520
22	0,000599	591,952	988233,761	337827,584	6573343,187
23	0,000627	619,251	987641,809	321547,833	6235515,603
24	0,000657	648,474	987022,557	306044,022	5913967,770
25	0,000686	676,653	986374,084	291279,001	5607923,748
26	0,000714	703,788	985697,431	277218,270	5316644,747
27	0,000738	726,925	984993,643	263828,891	5039426,477
28	0,000758	746,074	984266,718	251080,177	4775597,586
29	0,000774	761,245	983520,643	238942,722	4524517,409
30	0,000784	770,483	982759,398	227388,362	4285574,687
31	0,000789	774,789	981988,915	216390,562	4058186,325
32	0,000789	774,178	981214,126	205923,647	3841795,763
33	0,000790	774,548	980439,948	195963,022	3635872,116
34	0,000791	774,915	979665,400	186484,011	3439909,093
35	0,000792	775,281	978890,485	177463,335	3253425,082
36	0,000794	776,623	978115,204	168878,842	3075961,747
37	0,000823	804,350	977338,580	160709,288	2907082,905
38	0,000872	851,538	976534,231	152930,499	2746373,617
39	0,000945	922,020	975682,693	145521,089	2593443,117

<i>Mortalidade e Comutações provenientes da AT-2000 Masculina com juros de 5%</i>					
<b>x</b>	<b>qx</b>	<b>dx</b>	<b>lx</b>	<b>Dx</b>	<b>Nx</b>
40	0,001043	1016,675	974760,673	138460,545	2447922,028
41	0,001168	1137,333	973743,997	131729,648	2309461,483
42	0,001322	1285,786	972606,664	125310,274	2177731,835
43	0,001505	1461,838	971320,878	119185,347	2052421,561
44	0,001715	1663,308	969859,040	113339,022	1933236,214
45	0,001948	1886,045	968195,732	107756,805	1819897,193
46	0,002198	2123,949	966309,687	102425,614	1712140,388
47	0,002463	2374,789	964185,738	97333,793	1609714,774
48	0,002740	2635,362	961810,949	92470,533	1512380,981
49	0,003028	2904,384	959175,587	87825,870	1419910,448
50	0,003330	3184,383	956271,203	83390,413	1332084,577
51	0,003647	3475,908	953086,820	79154,974	1248694,165
52	0,003980	3779,451	949610,912	75110,758	1169539,190
53	0,004331	4096,396	945831,461	71249,350	1094428,432
54	0,004698	4424,271	941735,065	67562,637	1023179,083
55	0,005077	4758,727	937310,793	64043,074	955616,446
56	0,005465	5096,397	932552,066	60683,740	891573,372
57	0,005861	5435,818	927455,669	57478,194	830889,632
58	0,006265	5776,454	922019,852	54420,299	773411,438
59	0,006694	6133,333	916243,397	51504,149	718991,138
60	0,007170	6525,489	910110,064	48723,219	667486,990
61	0,007714	6970,251	903584,575	46070,356	618763,771
62	0,008348	7484,936	896614,324	43538,066	572693,415
63	0,009093	8084,854	889129,387	41118,676	529155,349
64	0,009968	8782,252	881044,534	38804,556	488036,673
65	0,010993	9588,779	872262,282	36588,336	449232,117
66	0,012188	10514,265	862673,502	34462,971	412643,782
67	0,013572	11565,505	852159,238	32421,845	378180,810
68	0,015160	12743,401	840593,733	30458,872	345758,966
69	0,016946	14028,752	827850,332	28568,681	315300,094
70	0,018920	15397,504	813821,580	26747,196	286731,413
71	0,021071	16823,594	798424,076	24991,561	259984,216
72	0,023388	18280,072	781600,482	23299,966	234992,655
73	0,025871	19747,862	763320,410	21671,454	211692,689
74	0,028552	21230,483	743572,548	20105,516	190021,235
75	0,031477	22737,161	722342,064	18601,393	169915,720
76	0,034686	24266,496	699604,903	17157,978	151314,327
77	0,038225	25814,811	675338,407	15774,130	134156,348
78	0,042132	27365,728	649523,597	14448,728	118382,218
79	0,046427	28884,923	622157,869	13180,928	103933,490
80	0,051128	30332,859	593272,945	11970,454	90752,563
81	0,056250	31665,380	562940,086	10817,551	78782,109

<i>Mortalidade e Comutações provenientes da AT-2000 Masculina com juros de 5%</i>					
<b>x</b>	<b>qx</b>	<b>dx</b>	<b>lx</b>	<b>Dx</b>	<b>Nx</b>
82	0,061809	32837,558	531274,706	9722,918	67964,558
83	0,067826	33806,998	498437,148	8687,575	58241,640
84	0,074322	34532,242	464630,150	7712,697	49554,065
85	0,081326	34978,142	430097,908	6799,499	41841,368
86	0,088863	35111,528	395119,765	5949,069	35041,869
87	0,096958	34905,679	360008,238	5162,302	29092,800
88	0,105631	34340,908	325102,559	4439,786	23930,497
89	0,114858	33396,302	290761,651	3781,721	19490,711
90	0,124612	32070,811	257365,349	3187,962	15708,990
91	0,134861	30383,447	225294,538	2657,813	12521,028
92	0,145575	28374,182	194911,091	2189,884	9863,215
93	0,156727	26100,830	166536,909	1781,992	7673,331
94	0,168290	23633,988	140436,079	1431,148	5891,339
95	0,180245	21052,993	116802,091	1133,619	4460,191
96	0,192565	18437,925	95749,098	885,038	3326,572
97	0,205229	15866,495	77311,173	680,582	2441,534
98	0,218683	13436,907	61444,678	515,149	1760,952
99	0,233371	11203,622	48007,772	383,328	1245,803
100	0,249741	9191,505	36804,150	279,877	862,475
101	0,268237	7406,733	27612,645	199,981	582,598
102	0,289305	5845,671	20205,912	139,370	382,617
103	0,313391	4500,370	14360,241	94,333	243,247
104	0,340940	3361,624	9859,870	61,686	148,914
105	0,372398	2419,934	6498,246	38,719	87,228
106	0,408210	1664,808	4078,312	23,143	48,509
107	0,448823	1083,236	2413,504	13,043	25,367
108	0,494681	658,058	1330,268	6,847	12,323
109	0,546231	367,182	672,210	3,295	5,476
110	0,603917	184,212	305,028	1,424	2,181
111	0,668186	80,728	120,816	0,537	0,757
112	0,739483	29,645	40,089	0,170	0,220
113	0,818254	8,546	10,444	0,042	0,050
114	0,904945	1,718	1,898	0,007	0,008
115	1,000000	0,180	0,180	0,001	0,001

<i>Mortalidade e Comutações provenientes da AT-2000 Feminina com juros de 5%</i>					
<b>x</b>	<b>qx</b>	<b>dx</b>	<b>lx</b>	<b>Dx</b>	<b>Nx</b>
0	0,001794	1794,000	1000000,000	1000000,000	20485233,473
1	0,000755	753,646	998206,000	950672,381	19485233,473
2	0,000392	391,001	997452,354	904718,689	18534561,092
3	0,000290	289,148	997061,353	861299,085	17629842,403
4	0,000232	231,251	996772,205	820046,960	16768543,318
5	0,000189	188,346	996540,954	780815,914	15948496,358
6	0,000156	155,431	996352,608	743493,657	15167680,444
7	0,000131	130,502	996197,177	707978,735	14424186,788
8	0,000131	130,485	996066,675	674177,133	13716208,053
9	0,000134	133,455	995936,190	641989,348	13042030,920
10	0,000140	139,412	995802,735	611336,497	12400041,572
11	0,000148	147,358	995663,323	582143,724	11788705,075
12	0,000158	157,292	995515,964	554340,539	11206561,351
13	0,000170	169,211	995358,673	527859,956	10652220,812
14	0,000183	182,120	995189,462	502638,304	10124360,856
15	0,000197	196,016	995007,342	478615,544	9621722,552
16	0,000212	210,900	994811,326	455734,531	9143107,007
17	0,000228	226,769	994600,426	433940,871	8687372,477
18	0,000244	242,627	994373,657	413182,793	8253431,606
19	0,000260	258,474	994131,030	393411,406	7840248,813
20	0,000277	275,303	993872,556	374580,114	7446837,406
21	0,000294	292,118	993597,253	356644,147	7072257,293
22	0,000312	309,911	993305,135	339561,232	6715613,145
23	0,000330	327,688	992995,224	323290,752	6376051,913
24	0,000349	346,441	992667,536	307794,348	6052761,161
25	0,000367	364,182	992321,095	293035,170	5744966,813
26	0,000385	381,903	991956,913	278978,691	5451931,643
27	0,000403	399,605	991575,009	265591,699	5172952,952
28	0,000419	415,302	991175,405	252842,539	4907361,252
29	0,000435	430,981	990760,102	240701,522	4654518,713
30	0,000450	445,648	990329,122	229139,825	4413817,191
31	0,000463	458,316	989883,474	218130,202	4184677,366
32	0,000476	470,966	989425,157	207646,865	3966547,163
33	0,000488	482,610	988954,191	197664,786	3758900,299
34	0,000500	494,236	988471,581	188160,310	3561235,513
35	0,000515	508,808	987977,346	179110,695	3373075,203
36	0,000534	527,308	987468,537	170493,765	3193964,508
37	0,000558	550,713	986941,229	162288,306	3023470,743
38	0,000590	581,970	986390,516	154474,047	2861182,438
39	0,000630	621,059	985808,546	147031,340	2706708,391
40	0,000677	666,972	985187,486	139941,629	2559677,051
41	0,000732	720,669	984520,514	133187,513	2419735,423

<i>Mortalidade e Comutações provenientes da AT-2000 Feminina com juros de 5%</i>					
<b>x</b>	<b>qx</b>	<b>dx</b>	<b>lx</b>	<b>Dx</b>	<b>Nx</b>
42	0,000796	783,105	983799,845	126752,399	2286547,910
43	0,000868	853,259	983016,740	120620,480	2159795,511
44	0,000950	933,055	982163,482	114776,935	2039175,030
45	0,001043	1023,423	981230,427	109207,521	1924398,095
46	0,001148	1125,278	980207,003	103898,683	1815190,574
47	0,001267	1240,497	979081,726	98837,531	1711291,891
48	0,001400	1368,978	977841,229	94011,718	1612454,360
49	0,001548	1511,579	976472,251	89409,621	1518442,642
50	0,001710	1667,183	974960,672	85020,204	1429033,021
51	0,001888	1837,578	973293,490	80833,162	1344012,817
52	0,002079	2019,657	971455,912	76838,618	1263179,656
53	0,002286	2216,131	969436,255	73027,495	1186341,038
54	0,002507	2424,821	967220,123	69391,004	1113313,542
55	0,002746	2649,328	964795,303	65920,992	1043922,538
56	0,003003	2889,324	962145,975	62609,498	978001,546
57	0,003280	3146,362	959256,650	59449,030	915392,049
58	0,003578	3420,963	956110,288	56432,416	855943,019
59	0,003907	3722,157	952689,326	53552,858	799510,603
60	0,004277	4058,733	948967,169	50803,454	745957,744
61	0,004699	4440,125	944908,436	48177,303	695154,290
62	0,005181	4872,566	940468,311	45667,541	646976,987
63	0,005732	5362,835	935595,745	43267,559	601309,446
64	0,006347	5904,188	930232,910	40971,000	558041,887
65	0,007017	6486,015	924328,722	38772,340	517070,888
66	0,007734	7098,595	917842,707	36666,928	478298,548
67	0,008491	7733,128	910744,112	34650,805	441631,620
68	0,009288	8387,166	903010,984	32720,558	406980,815
69	0,010163	9092,062	894623,818	30872,999	374260,257
70	0,011165	9886,962	885531,756	29104,035	343387,258
71	0,012339	10804,581	875644,794	27408,656	314283,223
72	0,013734	11877,715	864840,212	25781,391	286874,567
73	0,015391	13127,946	852962,497	24216,485	261093,176
74	0,017326	14550,973	839834,551	22708,351	236876,692
75	0,019551	16135,119	825283,578	21252,292	214168,340
76	0,022075	17861,952	809148,459	19844,560	192916,048
77	0,024910	19710,947	791286,506	18482,373	173071,488
78	0,028074	21661,212	771575,559	17163,788	154589,115
79	0,031612	23706,292	749914,347	15887,554	137425,327
80	0,035580	25838,483	726208,055	14652,682	121537,773
81	0,040030	28035,794	700369,572	13458,419	106885,091
82	0,045017	30266,450	672333,778	12304,456	93426,672
83	0,050600	32488,607	642067,329	11190,996	81122,216

<i>Mortalidade e Comutações provenientes da AT-2000 Feminina com juros de 5%</i>					
<b>x</b>	<b>qx</b>	<b>dx</b>	<b>lx</b>	<b>Dx</b>	<b>Nx</b>
84	0,056865	34663,694	609578,722	10118,792	69931,220
85	0,063907	36741,095	574915,028	9088,940	59812,428
86	0,071815	38648,961	538173,933	8102,946	50723,488
87	0,080682	40302,674	499524,972	7162,888	42620,542
88	0,090557	41585,794	459222,298	6271,402	35457,653
89	0,101307	42309,501	417636,505	5431,888	29186,251
90	0,112759	42321,498	375327,003	4649,143	23754,363
91	0,124733	41536,776	333005,506	3928,486	19105,220
92	0,137054	39946,955	291468,730	3274,737	15176,734
93	0,149552	37615,584	251521,775	2691,354	11901,997
94	0,162079	34669,701	213906,190	2179,863	9210,643
95	0,174492	31275,333	179236,489	1739,574	7030,780
96	0,186647	27616,506	147961,155	1367,650	5291,206
97	0,198403	23876,740	120344,650	1059,412	3923,555
98	0,210337	20290,771	96467,910	808,782	2864,144
99	0,223027	16989,559	76177,139	608,253	2055,362
100	0,237051	14030,475	59187,580	450,091	1447,109
101	0,252985	11424,070	45157,105	327,045	997,017
102	0,271406	9155,348	33733,035	232,673	669,973
103	0,292893	7198,632	24577,687	161,452	437,299
104	0,318023	5526,939	17379,054	108,727	275,848
105	0,347373	4117,105	11852,115	70,619	167,120
106	0,381520	2951,061	7735,011	43,893	96,501
107	0,421042	2014,244	4783,949	25,854	52,608
108	0,466516	1292,112	2769,706	14,256	26,754
109	0,518520	766,162	1477,594	7,243	12,499
110	0,577631	410,945	711,432	3,321	5,255
111	0,644427	193,642	300,487	1,336	1,934
112	0,719484	76,873	106,845	0,452	0,598
113	0,803380	24,079	29,972	0,121	0,146
114	0,896693	5,284	5,893	0,023	0,025
115	1,000000	0,609	0,609	0,002	0,002

<i>Mortalidade e Comutações provenientes da Winklevoss unisex com juros de 5%</i>					
<b>x</b>	<b>qxi</b>	<b>dxi</b>	<b>lxi</b>	<b>Dxi</b>	<b>Nxi</b>
0	0,000000	0,000	1000000,000	1000000,000	19245006,619
1	0,000000	0,000	1000000,000	952380,952	18245006,619
2	0,000000	0,000	1000000,000	907029,478	17292625,666
3	0,000000	0,000	1000000,000	863837,599	16385596,188
4	0,000000	0,000	1000000,000	822702,475	15521758,589
5	0,000000	0,000	1000000,000	783526,166	14699056,115
6	0,000000	0,000	1000000,000	746215,397	13915529,948
7	0,000000	0,000	1000000,000	710681,330	13169314,552
8	0,000000	0,000	1000000,000	676839,362	12458633,221
9	0,000000	0,000	1000000,000	644608,916	11781793,859
10	0,000000	0,000	1000000,000	613913,254	11137184,943
11	0,000000	0,000	1000000,000	584679,289	10523271,690
12	0,000000	0,000	1000000,000	556837,418	9938592,401
13	0,000000	0,000	1000000,000	530321,351	9381754,982
14	0,000000	0,000	1000000,000	505067,953	8851433,632
15	0,000000	0,000	1000000,000	481017,098	8346365,679
16	0,000000	0,000	1000000,000	458111,522	7865348,581
17	0,000000	0,000	1000000,000	436296,688	7407237,059
18	0,000000	0,000	1000000,000	415520,655	6970940,371
19	0,000000	0,000	1000000,000	395733,957	6555419,716
20	0,008400	8400,000	1000000,000	376889,483	6159685,759
21	0,008530	8458,348	991600,000	355927,249	5782796,276
22	0,008720	8572,995	983141,652	336086,847	5426869,028
23	0,008910	8683,407	974568,657	317291,590	5090782,181
24	0,009100	8789,556	965885,250	299490,021	4773490,590
25	0,009300	8900,990	957095,694	282633,011	4474000,569
26	0,009510	9017,332	948194,704	266670,976	4191367,558
27	0,009730	9138,196	939177,373	251557,081	3924696,582
28	0,009960	9263,190	930039,177	237247,076	3673139,502
29	0,010210	9401,123	920775,987	223699,139	3435892,426
30	0,010480	9551,209	911374,864	210871,591	3212193,287
31	0,010770	9712,641	901823,655	198725,387	3001321,696
32	0,011080	9884,590	892111,014	187223,919	2802596,309
33	0,011410	10066,204	882226,424	176332,836	2615372,390
34	0,011770	10265,326	872160,221	166019,884	2439039,555
35	0,012160	10480,642	861894,895	156253,171	2273019,670
36	0,012580	10710,791	851414,253	147002,984	2116766,499
37	0,013030	10954,366	840703,462	138241,606	1969763,515
38	0,013510	11209,910	829749,096	129943,160	1831521,909
39	0,014010	11467,734	818539,186	122083,455	1701578,750
40	0,014540	11734,819	807071,452	114641,015	1579495,295
41	0,015110	12017,537	795336,633	107594,414	1464854,280



<i>Mortalidade e Comutações provenientes da Winklevoss unissex com juros de 5%</i>					
<b>x</b>	<b>qxi</b>	<b>dxi</b>	<b>lxi</b>	<b>Dxi</b>	<b>Nxi</b>
42	0,015700	12298,110	783319,096	100922,536	1357259,866
43	0,016330	12590,773	771020,986	94607,668	1256337,330
44	0,016990	12885,729	758430,214	88631,167	1161729,662
45	0,017700	13196,137	745544,484	82976,498	1073098,495
46	0,018450	13511,827	732348,347	77626,490	990121,997
47	0,019240	13830,415	718836,520	72565,982	912495,507
48	0,020090	14163,573	705006,105	67780,774	839929,525
49	0,020970	14486,968	690842,533	63256,246	772148,751
50	0,021910	14818,950	676355,565	58980,726	708892,505
51	0,022900	15149,188	661536,614	54941,389	649911,779
52	0,023950	15480,979	646387,426	51126,887	594970,390
53	0,025060	15810,516	630906,447	47526,093	543843,504
54	0,026240	16140,117	615095,931	44128,656	496317,411
55	0,027490	16465,295	598955,814	40924,496	452188,754
56	0,028810	16781,552	582490,519	37904,268	411264,258
57	0,030200	17084,411	565708,967	35059,282	373359,991
58	0,031670	17374,940	548624,556	32381,421	338300,709
59	0,033230	17653,425	531249,616	29862,763	305919,288
60	0,034880	17914,235	513596,192	27495,641	276056,525
61	0,036630	18156,830	495681,957	25272,946	248560,884
62	0,038470	18370,392	477525,126	23187,807	223287,938
63	0,040420	18559,034	459154,735	21234,069	200100,131
64	0,042480	18716,505	440595,700	19405,512	178866,062
65	0,044650	18836,906	421879,195	17696,349	159460,550
66	0,046950	18922,835	403042,289	16101,149	141764,201
67	0,049380	18967,819	384119,454	14614,477	125663,051
68	0,051950	18969,627	365151,635	13231,251	111048,575
69	0,054660	18922,309	346182,008	11946,560	97817,324
70	0,057540	18830,523	327259,699	10755,772	85870,764
71	0,060560	18678,471	308429,176	9654,176	75114,992
72	0,063750	18471,607	289750,705	8637,637	65460,816
73	0,067130	18210,966	271279,098	7701,893	56823,178
74	0,070690	17889,386	253068,132	6842,729	49121,285
75	0,074440	17506,706	235178,746	6056,206	42278,556
76	0,078410	17067,665	217672,040	5338,459	36222,350
77	0,082590	16567,915	200604,375	4685,591	30883,891
78	0,087000	16011,172	184036,460	4093,912	26198,300
79	0,091650	15399,518	168025,288	3559,754	22104,388
80	0,096540	14734,492	152625,770	3079,526	18544,634
81	0,101710	14024,922	137891,278	2649,742	15465,107
82	0,107150	13272,280	123866,356	2266,892	12815,365
83	0,112870	12482,753	110594,076	1927,614	10548,473

<i>Mortalidade e Comutações provenientes da Winklevoss unisex com juros de 5%</i>					
<b>x</b>	<b>qxi</b>	<b>dxi</b>	<b>lxi</b>	<b>Dxi</b>	<b>Nxi</b>
84	0,118900	11665,436	98111,323	1628,613	8620,859
85	0,125240	10826,483	86445,887	1366,639	6992,246
86	0,131910	9974,956	75619,404	1138,554	5625,607
87	0,138930	9119,983	65644,448	941,302	4487,053
88	0,146300	8269,529	56524,465	771,930	3545,751
89	0,154040	7433,190	48254,936	627,616	2773,820
90	0,162190	6620,879	40821,745	505,655	2146,204
91	0,170940	5846,296	34200,867	403,470	1640,549
92	0,180590	5120,552	28354,570	318,572	1237,079
93	0,191540	4450,244	23234,019	248,611	918,507
94	0,204290	3837,337	18783,775	191,421	669,897
95	0,219440	3279,846	14946,437	145,062	478,476
96	0,237690	2773,032	11666,591	107,838	333,414
97	0,259840	2310,902	8893,559	78,291	225,576
98	0,286790	1887,840	6582,657	55,189	147,285
99	0,319540	1500,182	4694,817	37,487	92,096
100	0,359190	1147,481	3194,635	24,294	54,609
101	0,406940	833,069	2047,154	14,826	30,316
102	0,464090	563,445	1214,085	8,374	15,489
103	0,532040	346,167	650,640	4,274	7,115
104	0,612290	186,426	304,474	1,905	2,841
105	0,706400	83,389	118,047	0,703	0,936
106	0,816190	28,288	34,659	0,197	0,233
107	0,943340	6,010	6,371	0,034	0,036
108	1,000000	0,361	0,361	0,002	0,002
109	1,000000	0,000	0,000	0,000	0,000
110	1,000000	0,000	0,000	0,000	0,000
111	1,000000	0,000	0,000	0,000	0,000
112	1,000000	0,000	0,000	0,000	0,000
113	1,000000	0,000	0,000	0,000	0,000
114	1,000000	0,000	0,000	0,000	0,000
115	1,000000	0,000	0,000	0,000	0,000

## ANEXO 2 – Valores tabelados de $X^2$ (qui-quadrado)

Os valores tabelados correspondem aos pontos  $x$  tais que:  $P(X^2 \leq x)$

n	$P(X^2 \leq x)$												
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	0,102	0,455	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,675	4,351	6,626	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,455	5,348	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	5,071	7,344	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	8,343	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	9,342	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,341	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,340	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	9,299	12,340	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,165	13,339	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,037	14,339	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,912	15,338	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,792	16,338	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	13,675	17,338	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	14,562	18,338	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	15,452	19,337	23,828	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	16,344	20,337	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	17,240	21,337	26,039	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	18,137	22,337	27,141	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	19,037	23,337	28,241	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	19,939	24,337	29,339	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	20,843	25,336	30,435	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,878	14,573	16,151	18,114	21,749	26,336	31,528	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	22,657	27,336	32,620	37,916	41,337	44,461	48,278	50,994
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	23,567	28,336	33,711	39,087	42,557	45,722	49,588	52,335
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	24,478	29,336	34,800	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	33,660	39,335	45,616	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	42,942	49,335	56,334	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	52,294	59,335	66,981	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	61,698	69,334	77,577	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	71,145	79,334	88,130	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	80,625	89,334	98,650	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	90,133	99,334	109,141	118,498	124,342	129,561	135,807	140,170